La dialectique au coeur de la géométrie différentielle synthétique

Guillaume Laplante-Anfossi

Journée MaMuPhi *Lawvere & Hegel II*, 4 février 2023*

Bonjour à tous,

Merci de votre présence et de votre participation. Merci à Loïc Merel pour son passionnant exposé ce matin, et à Alain-Patrick Olivier d'avoir accepté malgré un horaire chargé de nous rejoindre un peu plus tard pour clore la journée.

Cet après-midi sera consacré à Lawvere et Hegel, et fait suite à la journée du 9 octobre 2021, organisée avec Martin Gonzalez. C'est avec tristesse que l'on a appris la mort de William Lawvere le 23 janvier dernier, il y a tout juste quelques jours, et l'on souhaiterait dédier cette journée à sa mémoire. Une manière pour nous de rendre hommage à la pensée féconde de ce catégoricien qui a parcouru un très large spectre de la discipline dans ses travaux.

Mon exposé d'aujourd'hui est la suite de mon exposé d'octobre 2021 ; je souhaite littéralement reprendre là où j'ai laissé la dernière fois. Je commencerai donc par rappeler les grandes lignes de cette présentation.

Dans un article de 1996 intitulé *Unité et identité des opposés dans le calcul différentiel et la physique* [Law96], William Lawvere présente une situation mathématique qui est pour lui l'incarnation de la dialectique hégélienne, la situation d'UIAO (pour "unity and identity of adjointly opposites")

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "i_0"] \arrow[r, bend right, "i_1"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "r" description] \end{tikzcd}$$

Ici, la catégorie $\mathcal{B}$ est incluse de deux manières distinctes ("opposées" ; le "même" et "l'autre") dans la catégorie $\mathcal{C}$ par les foncteurs i_0 et i_1, avant d'être ramenée à elle-même par la rétraction commune qui identifie les deux images (et réalise "l'Aufhebung") ; on a

$$r \circ i_0 = r \circ i_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \ .$$

Dans la situation la plus générale considérée par Lawvere, les foncteurs i_0 et i_1 sont respectivement adjoints à gauche et à droite du foncteur r ; on a à la fois opposition et unité-réconciliation (c'est le sens du AO, "adjointly opposites"). Je renvoie à l'exposé de Martin Gonzalez d'octobre 2021 [Gon21] pour des considérations profondes au sujet de la situation d'adjonction. Aujourd'hui, nous nous contenterons d'examiner la situation d'UI (sans le AO).

*Un enregistrement de cet exposé est disponible à l'adresse `https://youtu.be/oVlX5a3Z3p0`.

L'exemple paradigmatique développé par Lawvere dans son article concerne le calcul différentiel (et plus généralement la géométrie différentielle). Concrètement, il considère l'UI suivante

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \arrow[rr, bend left, "i_0"] \arrow[rr, bend right, "i_1"'] & & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \arrow[ll, "r" description] \end{tikzcd}$$

où

$$\begin{array}{rcl} i_0(f) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} i_1(f) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(y) \end{array}$$

sont les deux manières triviales de fabriquer une fonction de deux variables à partir d'une fonction d'une variable, et où

$$\begin{array}{ccccccc} r(g) & : & \mathbb{R} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (x,x) & \mapsto & g(x,x) \end{array}$$

est la restriction d'une fonction de deux variables à la diagonale.

Cette UI a lieu dans la catégorie des anneaux : les ensembles de fonctions sont de part et d'autre considérées avec leurs opérations naturelles d'addition et de multiplication, et les morphismes i_0, i_1 et r préservent ces opérations.

Cette UI particulière permet à Lawvere de définir la dérivée d'une fonction de manière "synthétique", sans recourir à l'analyse et à la notion de limite. Introduisons d'abord notations et définitions qui s'appliquent à n'importe quelle UI dans la catégorie des anneaux

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[rr, bend left, "i_0"] \arrow[rr, bend right, "i_1"'] & & \mathcal{C} \arrow[ll, "r" description] \end{tikzcd}$$

Notations :

- pour $y \in \mathcal{B}$, on note $\Delta y := i_1(y) - i_0(y)$,
- pour $c \in \mathcal{C}, b \in \mathcal{B}$, on note $r(c) = b$ par $c \to b$.

Définition 1. *Un élément* $x \in \mathcal{B}$ *est dit* variable *si pour tout* $c \in \mathcal{C}$, $c\Delta x = 0 \implies c \to 0$.

On note $A(x) := \{y \in \mathcal{B} \mid \exists g \in \mathcal{C}, \Delta y = g\Delta x\}$.

Définition 2. *Soit* $y \in A(x)$. *S'il existe, on note* $\frac{dy}{dx}$ *l'élément de* $\mathcal{B}$ *tel que* $\forall g \in \mathcal{C}$, $\Delta y = g\Delta x \implies g \to \frac{dy}{dx}$.

Maintenant, nous sommes prêts à énoncer les faits les plus importants concernant la situation d'UI dans la catégorie des anneaux (je renvoie à mon exposé d'octobre 2021 [LA21] pour les preuves détaillées).

Proposition 1. *Si $x \in \mathcal{B}$ est une variable, alors*

1. *$A(x)$ est un anneau,*
2. *$\frac{d}{dx}$ est bien défini sur $A(x)$,*
3. *$\frac{d}{dx}$ est bien une dérivée au sens où il satisfait les règles de dérivation en chaîne et de dérivation des fonctions composées.*

Dans le cas qui nous intéresse, où $\mathcal{B} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, on a que

i) l'identité $\mathrm{id}_\mathbb{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une variable,

ii) par le lemme de Hadamard, $A(\mathrm{id}_\mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, l'ensemble de toutes les fonctions que l'on peut considérer !

Autrement dit, toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ admet en tout point x une fonction "pente-de-la-sécante" $g(x, y)$ qui se spécifie de manière non-ambigüe à une fonction "pente-de-la-tangente" $g(x, x)$ le long de la diagonale.

Encore en d'autres mots, la présence d'un anneau $\mathbb{R}$ combinée à une situation d'UI permet de définir la dérivée de toute fonction ($\mathcal{C}^\infty$) de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Lawvere observe que la situation précédente est très générale, et qu'il suffit donc, pour pouvoir parler de dérivée, de considérer une catégorie munie d'un anneau R, où

i) le morphisme identité $\mathrm{id}_R : R \to R$ est une variable, et où

ii) tous les morphismes $f : R \to R$ appartiennent à $A(\mathrm{id}_R)$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(R, R) \arrow[r, bend left, "i_0"] \arrow[r, bend right, "i_1"'] & \mathrm{Hom}(R \times R, R) \arrow[l, "r"'] \end{tikzcd}$$

De plus, il remarque que les fonctions $g : R \times R \to R$ qui entrent dans la définition de $A(\mathrm{id}_R)$ -et dont l'existence est garantie, dans le cas $\mathcal{C}^\infty$, par le lemme de Hadamard- n'ont pas besoin d'être définies sur tout le produit cartésien $R \times R$;

($*$) il suffit qu'elles soient définies sur un petit voisinage $\mathrm{vois}(\Delta) \subset R \times R$ de la diagonale $\Delta : R \to R \times R, x \mapsto (x, x)$.

C'est là le point de départ de la géométrie différentielle synthétique (GDS) dont François Nicolas a parlé en détail le 5 novembre dernier [Nic22] dans le but d'éclairer le romantisme révolutionnaire d'Henri Lefebvre, et qui a fait l'objet d'un exposé passionnant de Francis Borceux à ce séminaire le 1er décembre 2007 [Bor07]. Je prendrai ici fortement appui sur ces deux exposés auxquels je renvoie pour bien davantage de détails.

En effet, on peut voir la GDS comme une vaste généralisation du calcul différentiel et de la géométrie différentielle ordinaires naissant du (on pourrait aussi dire dont le pivot est le) point de vue de l'UI que nous venons de décrire.

Le leitmotiv est le suivant :

> On peut développer la géométrie différentielle dans tout topos E (catégorie munie de bonnes propriétés ; produit, coproduit, etc. comme la catégorie des ensembles) qui
>
> a) possède un anneau R,
>
> b) vérifie l'axiome de Kock–Lawvere.

Ce dernier axiome généralise et "subsume" les conditions (i) et (ii) plus haut, en poussant l'observation $(*)$ à son extrémité. On appelle *lisse* un topos qui vérifie les conditions (a) et (b).

Avant de continuer, il est absolument indispensable de préciser que tout énoncé logique portant sur les objets et morphismes du topos E doit être interprété *dans la logique interne de ce topos*. Cette dernière est une logique intuitionniste, où la règle du tiers-exlu est inopérante : la double négation, comme dans la philosophie de Hegel, n'est pas égale à l'identité ! Dans un topos, tout se passe comme dans les ensembles, on peut raisonner comme dans les ensembles, cependant sans la règle du tiers-exclu.

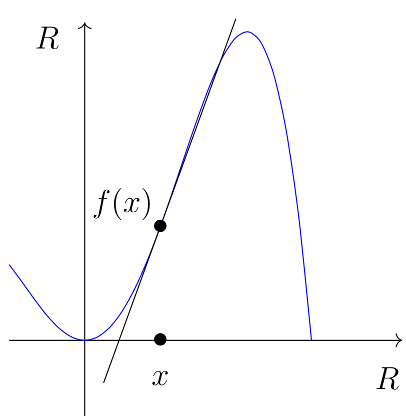
Une telle logique nous permet de considérer dans l'anneau R l'ensemble des infinitésimaux nilpotents

$$D := \{r \in R \mid r^2 = 0\} ,$$

sans que cet ensemble soit réduit à $\{0\}$ (c.f. François Nicolas [Nic22]). L'axiome de Kock–Lawvere stipule que

b) Toute fonction $f : D \to R$ s'écrit de manière unique sous la forme $f(t) = at + b$, $a, b \in R$.

Il érige en principe l'idée que toute fonction $f : R \to R$ est sur un voisinage infinitésimal (un *voisinuage*) indiscernable de sa tangente, illustrée à gauche de la Figure 1. Comme l'a montré



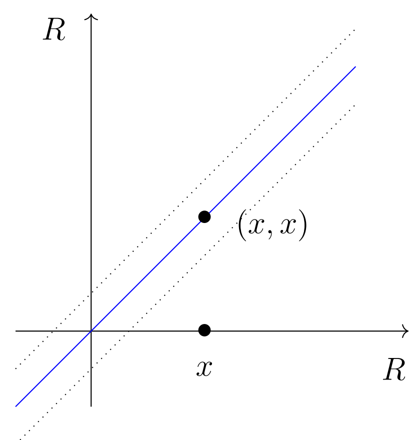


FIGURE 1 – Une fonction indiscernable de sa tangente sur un voisinuage, à gauche, et un voisinuage de la diagonale, à droite.

François, cet axiome implique que toute fonction $f : R \to R$ est dérivable (et donc un infinité de fois) : pour chaque $x \in R$, il suffit de définir

$$\begin{array}{rcl} f_x : D & \to & R \\ d & \mapsto & f(x+d) \end{array}$$

et d'appliquer l'axiome de Kock–Lawvere qui nous donne immédiatement l'existence d'un unique $f'(x) \in R$ tel que

$$f(x+d) = f'(x)d + f(x) .$$

Un topos lisse, c'est un topos où toutes les fonctions sont infiniment dérivables, où tout se passe comme pour $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

En quoi l'axiome de Kock–Lawvere "subsume"-t-il les conditions (i) et (ii) qui émergeaient à partir de la situation d'UI ? Maintenant que nous travaillons dans un topos qui admet des infinitésimaux, nous pouvons prendre la remarque $(*)$ *à la lettre* et restreindre notre analyse à un voisinage infinitésimal de la diagonale $\Delta : R \to R \times R$ -voir la Figure 1, à droite.

i) Le fait que l'identité $\mathrm{id}_R : R \to R$ est une variable découle directement du principe de micro-annulation pour les infinitésimaux (c.f. François Nicolas [Nic22])

$$\forall g : \mathrm{vois}(\Delta) \to R,\ g(x+d-x) = gd = 0 \implies g(\Delta(x)) = 0\ .$$

ii) Le fait que $A(\mathrm{id}_R) = \{f : R \to R\}$ découle trivialement de l'axiome de Kock–Lawvere, car

$$A(\mathrm{id}_R) = \{f : R \to R \mid \exists g : \mathrm{vois}(\Delta) \to R, f(x+d) - f(x) = g(x, x+d)d\}$$

et la fonction g ici est constante, égale à $f'(x)$!

Autrement dit, on suppose non seulement l'existence d'une fonction pente-de-la-sécante sur le voisinage de la diagonale comme requis par la situation d'UI, mais on impose qu'elle soit constante, égale à la dérivée -sa valeur le long de la diagonale.

En somme, on a poussé la situation d'UI donnant naissance au calcul différentiel à sa "limite", où l'on peut se restreindre à l'étude des voisinuages de chaque point ; voisinuages que l'on peut manipuler "synthétiquement".

Il se trouve (voir par exemple le livre de Moerdijk et Reyes, "Models for smooth infinitesimal analysis" [MR91]) que l'on peut développer l'équivalent de la quasi-totalité de la géométrie différentielle ordinaire dans tout topos lisse, avec des preuves en général plus simples car l'intuition des infinitésimaux se trouve formalisée, et toujours constructives car on ne peut recourir au tiers-exclu.

Le point essentiel ici est que l'on peut retrouver la géométrie différentielle classique depuis ce point de vue : en effet, il existe un topos lisse E et un plongement des variétés lisses dans E qui préserve et reflète toutes leurs propriétés habituelles (cette construction est esquissée par Francis Borceux dans son exposé [Bor07], et j'y réfère avec enthousiasme). Les théorèmes prouvés dans E (avec sa logique interne) s'appliquent alors aux variétés classiques, que l'on retrouve ainsi par voie *synthétique* (formalisant les infiniment petits) sans devoir recourir à l'analyse.

J'aimerais noter au passage que pour montrer que le topos E en question satisfait bien l'axiome de Kock–Lawvere, on se sert de manière essentielle du lemme de Hadamard (c.f. [MR91, p.81]), ce qui montre bien que dans la montée en généralité qui nous a menés de l'anneau "analytique" $\mathbb{R}$ à l'anneau "synthétique" R, on a en quelque sorte transformé le lemme en axiome.

Il est remarquable que cette montée en généralité ait été suggérée par un schéma de pensée "dialectique" inspiré par la philosophie de Hegel ; qu'elle mène à un point de vue fécond où les raisonnements synthétiques, utilisés par certains mathématiciens comme Sophus Lie pour découvrir -mais pas prouver- leurs résultats, peuvent être formalisés, et que de plus elle nous force à travailler dans une logique intuitionniste, qui semble par nature être en bien meilleure adéquation avec la pensée de Hegel que la logique classique.

Cette dernière observation soulève naturellement la question des rapports que pourrait entretenir la *Science de la logique* [Heg32] avec la logique intuitionniste, interne à la majorité des topos de faisceaux. Ma culture limitée ne connaît pas pour l'instant d'études préalables de cette question ; elle me semble du plus vif intérêt. [1]

1. Un point de départ suggéré par François Nicolas est le chapitre sur Hegel dans la *Logique des Mondes* de Alain Badiou [Bad06].

Dans le cas que nous venons d'étudier, il s'avère donc que la philosophie instruit les mathématiques ; il me semblerait tout aussi important de voir comment les mathématiques pourraient à leur tour instruire la philosophie. Le point de vue de la GDS peut-il aider à comprendre, à approfondir la philosophie de Hegel ? Cette question me semble être de la plus haute importance.

* * *

Comme le dit Gilles Marmasse dans son petit ouvrage sur Hegel [Mar18, p.45],

> La philosophie, aux yeux de Hegel, n'a pour tâche ni de décrire les choses considérées comme données ni de présenter leur raison d'être abstraite, mais de montrer leur genèse. L'Encyclopédie participe largement de cette époque de l'histoire de la pensée qui met au second plan la description et la construction de systèmes statiques pour promouvoir l'analyse dynamique des processus.

L'incarnation qu'en donne Lawvere dans la GDS est fondamentalement en accord avec ce but, la dérivée d'une fonction étant véritablement, dans son interprétation physique, l'expression de la vitesse, du mouvement. Lawvere donne dans son article un deuxième exemple, un peu plus élaboré, qui va dans ce sens : il considère un champ vectoriel ξ sur une variété M, qui représente pour lui les "lois du devenir". Dans ce contexte,

> Le champ vectoriel trivial joue le rôle d'une référence de "non-devenir" par rapport auquel un changement ($\Delta = i_1 - i_0$) peut être défini. [Law96]

Il s'agit ici véritablement, littéralement, de décrire un système dynamique. Si l'on voit ξ comme une dérivation de l'anneau $R := \mathcal{C}^\infty(M)$ -ce qui est *précisément* rendu possible par... le lemme de Hadamard ! [nLa23], on peut considérer l'UI suivante :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, bend left, "i_0"] \arrow[r, bend right, "i_1"'] & R[\varepsilon]/\varepsilon^2 \arrow[l, "r" description] \end{tikzcd}$$

où $R[\varepsilon]/\varepsilon^2 := \{f + g\varepsilon \mid \varepsilon^2 = 0\}$ est l'anneau des nombres duaux, et les morphismes sont définis par

$$\begin{aligned} i_0(f) &:= f + 0\varepsilon \\ i_1(f) &:= f + \xi(f)\varepsilon \\ r(f + g\varepsilon) &:= f\ . \end{aligned}$$

On a alors $\Delta f = \xi(f)\varepsilon$, et $x \in R$ est variable si et seulement si il n'est pas diviseur de zéro. Si on le suppose de plus inversible, on obtient avec les définitions données au début de l'exposé

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\xi(y)}{\xi(x)}\ .$$

On retrouve ainsi la dérivée de Lie (lui-même qui s'est servi de raisonnements synthétiques bien avant leur formalisation par la GDS), c'est-à-dire la "dérivée le long de ξ pa rapport à x". La dialectique mathématique entre l'être et le néant donnant naissance au devenir, au sens des systèmes dynamiques.

Notons au passage la présence des infinitésimaux nilpotents dans la définition des nombres duaux -le liens précis avec la GDS m'échappe toujours cependant !

Ainsi, on peut voir dans certaines situations le temps (au sens mathématique, éventuellement physique) engendré par un processus dialectique à l'oeuvre.

- On peut penser à la géométrie non-commutative, telle que développée notamment par Alain Connes, où l'apparition du "temps propre" canoniquement associé à un espace non-commutatif pourrait jaillir d'une UI liant un espace commutatif à sa négation non-commutative. Il s'agit d'une piste que j'aimerais explorer dans un futur exposé.
- On peut aussi être amené à réfléchir à la notion de temps musical. Se pourrait-il que dans certaines musiques, on puisse anaylser le temps musical comme résultat d'une dialectique musicale ? Théodor W. Adorno donne, dans un ouvrage inachevé sur Beethoven [WA66], un sens précis à ces termes, en analysant la musique du compositeur allemand comme une pure incarnation de la dialectique hégélienne ("La musique de Beethoven, c'est la philosophie hégélienne ; mais elle est en même temps plus vraie qu'elle [...]" [WA66, p.20]). Il va même plus loin, en affirmant que par sa nature dialectique, la musique de Beethoven contient *à la fois tout le romantisme et sa critique* [WA66, p.35] -une affirmation du plus grand intérêt pour notre séminaire cette année ! C'est sur cet ouvrage que portera l'exposé de Alain-Patrick Olivier [Oli23].

Merci de votre attention !

Références

[Bad06] Alain Badiou : *Logiques des Mondes*. Editions du Seuil, 2006.

[Bor07] Francis Borceux : Des jets aux infiniment petits : quand l'intuition se mue en rigueur. `http://www.entretemps.asso.fr/maths/Borceux.pdf`, `https://www.youtube.com/watch?v=IK_X5Z9sBTE`, décembre 2007. Séminaire MaMuPhi.

[Gon21] Martin Gonzalez : De l'inauguration d'une intellectualité mathématique matérialiste codifiée catégoriquement. `http://www.entretemps.asso.fr/2021-2022/Gonzalez-Lawvere-texte.pdf`, `https://www.youtube.com/watch?v=u7G-mpWPJGA`, octobre 2021. Séminaire MaMuPhi.

[Heg32] Georg Wilhelm Friedrich Hegel : *Science de la logique*. 1832. trad. Gwendoline Jarczyk et Pierre-Jean Labarrière, Aubier, 1972.

[LA21] Guillaume Laplante-Anfossi : L'unité et l'identité des opposés adjoints selon lawvere. `https://www.math.univ-paris13.fr/~laplante-anfossi/fichiers/Lawvere-Hegel.pdf`, `https://youtu.be/kqzqACntMyw`, octobre 2021. Séminaire MaMuPhi.

[Law96] F. William Lawvere : Unity and identity of opposites in calculus and physics. *Applied Categorical Structures*, 4(2):167–174, juin 1996.

[Mar18] Gilles Marmasse : *Hegel. Une philosophie de la réconciliation*. Ellipses, 2018.

[MR91] Ieke Moerdijk et Gonzalo E. Reyes : *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*. Springer, New York, NY, 1991.

[Nic22] François Nicolas : Le "romantisme révolutionnaire" d'henri lefebvre, à la lumière de la mathématique différentielle et intégrale. `http://www.entretemps.asso.fr/2022-2023/Lefebvre.pdf`, `https://www.youtube.com/watch?v=_Kotx_sJBI4`, novembre 2022. Séminaire MaMuPhi.

[nLa23] nLab : Derivations of smooth functions are vector fields. https://ncatlab.org/nlab/show/derivations+of+smooth+functions+are+vector+fields, 2023.

[Oli23] Alain-Patrick Olivier : Beethoven–Hegel–Adorno, dialectique et libre improvisation. http://www.entretemps.asso.fr/2022-2023/APO.pdf, https://www.youtube.com/watch?v=Gay_G5TDf_E, février 2023. Séminaire MaMuPhi.

[WA66] Theodor W. Adorno : *Beethoven : Philosophie de la musique*. 1939-1966. trad. Sacha Zilberfarb, Éditions Rue d'Ulm, 2021.