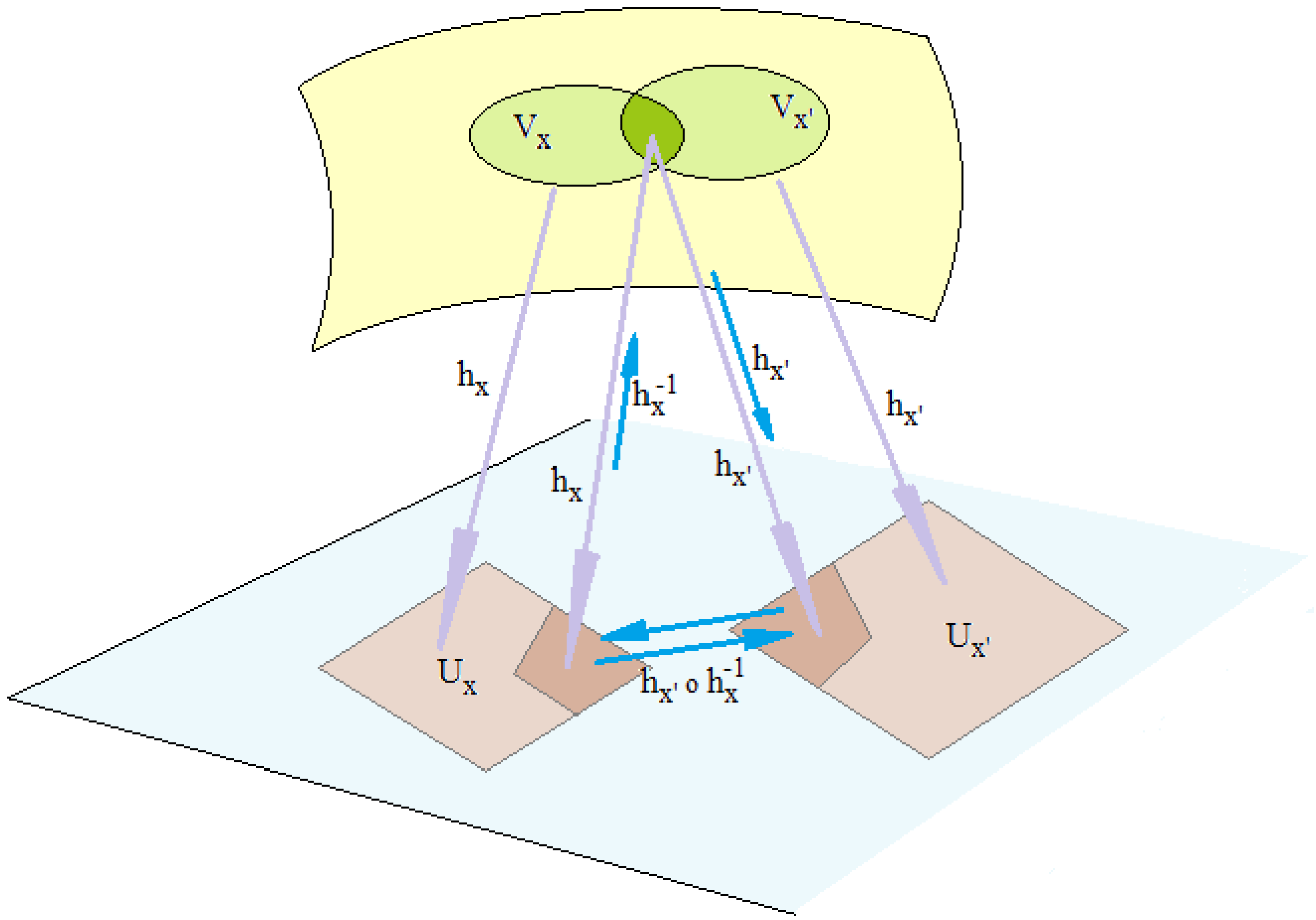
Local-global-obstructions

David Rabouin

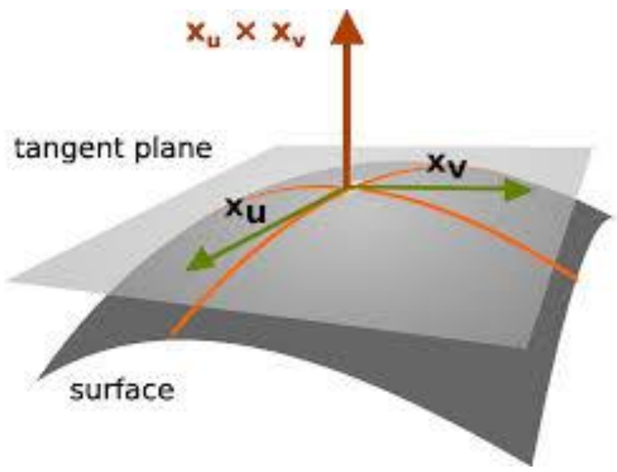
Séminaire MAMUPHI
14 Février 2026

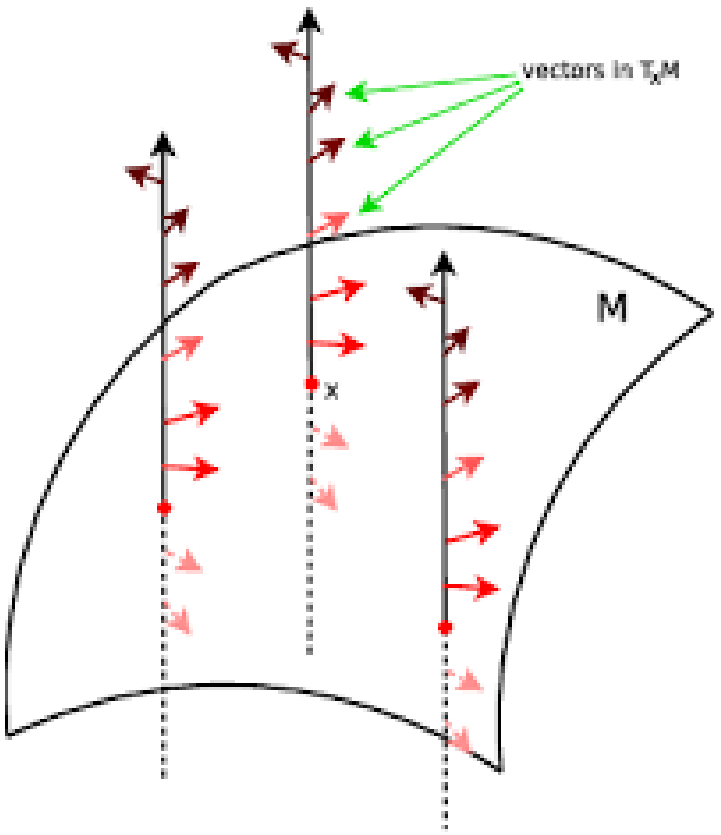
J'ai quasi peur que Votre Altesse ne pense que je ne parle pas ici sérieusement; mais cela serait contraire au respect que je lui dois, et que je ne manquerai jamais de lui rendre. **Et je puis dire, avec vérité, que la principale règle que j'ai toujours observée en mes études, et celle que je crois m'avoir le plus servi pour acquérir quelque connaissance, a été que je n'ai jamais employé que fort peu d'heures, par jour, aux pensées qui occupent l'imagination, et fort peu d'heures, par an, à celles qui occupent l'entendement seul, et que j'ai donné tout le reste de mon temps au relâche des sens et**
au repos de l'esprit.

Descartes à Elisabeth 1643 (AT III, 692-693)

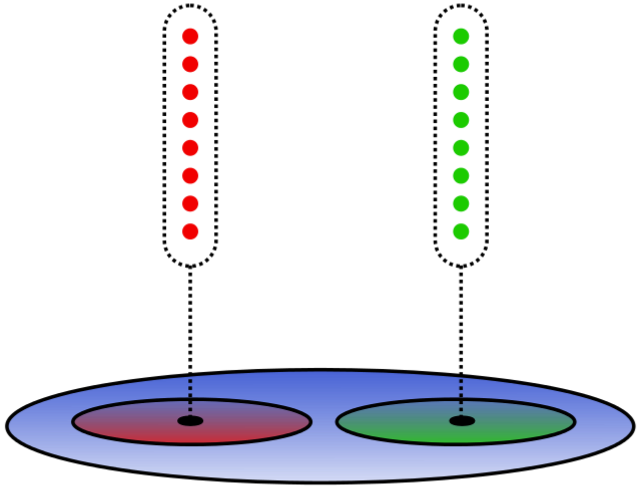


V_x
$V_{x'}$
h_x
h_x^{-1}
$h_{x'}$
$h_{x'}$
h_x
$h_{x'}$
U_x
$U_{x'}$
$h_{x'} \circ h_x^{-1}$

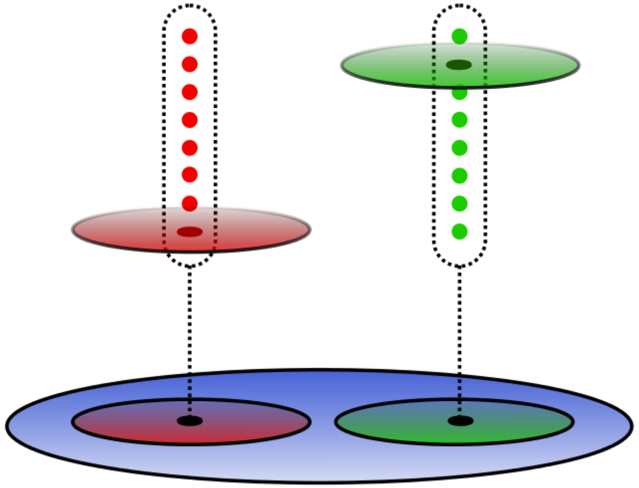

$x_u \times x_v$
tangent plane
x_v
x_u
surface


vectors in T_xM
M
x

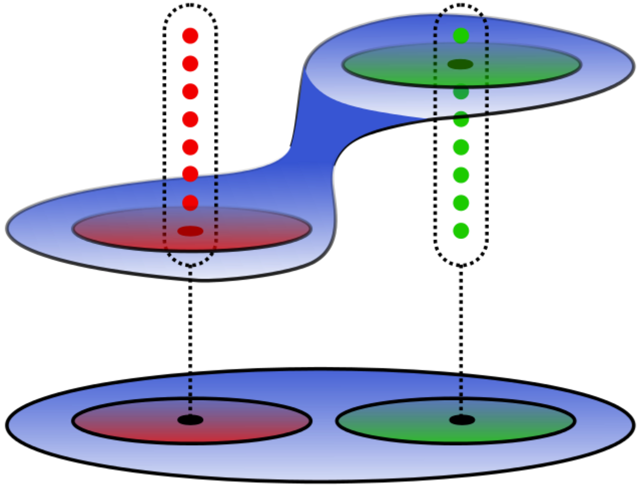
Du point de vue mathématique, les fibrés apparaissent comme une généralisation des fonctions, et sont eux-mêmes un cas particulier d'une structure plus générale : celle de faisceau



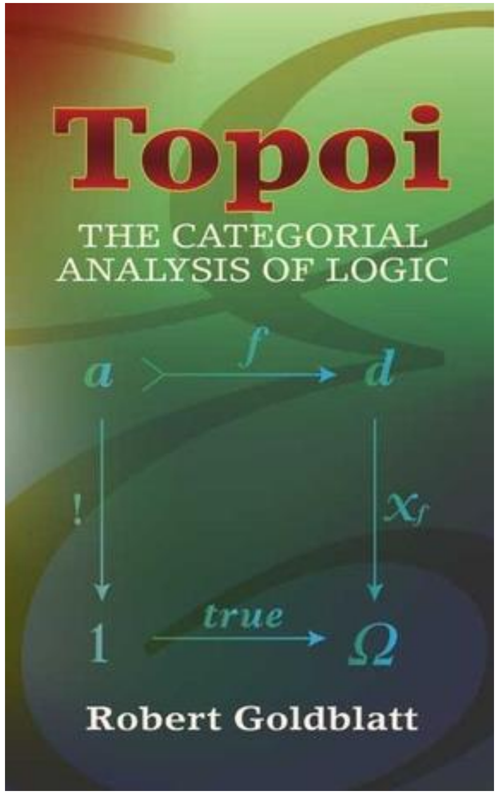
Préfaisceaux d'ensembles



sections (correspondant à tel ou tel germe)

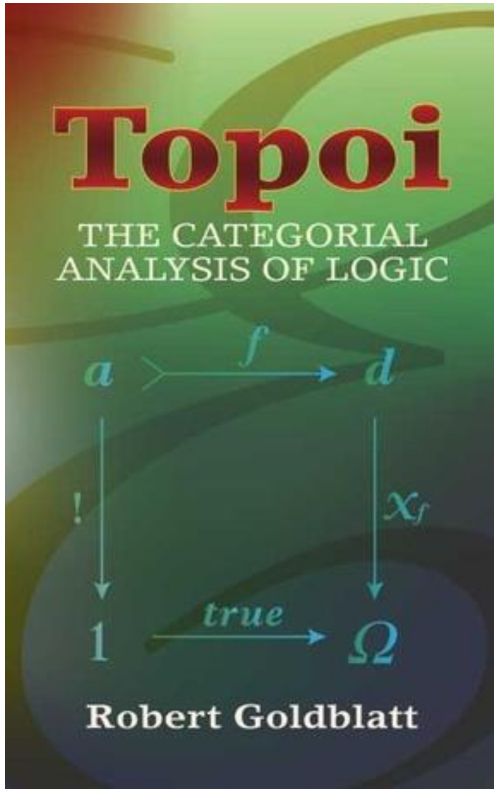


recollement des sections (faisceau)


Topoi
THE CATEGORIAL ANALYSIS OF LOGIC
a
f
d
!
χ_f
1
true
Ω
Robert Goldblatt

4.5. Bundles and sheaves

One of the primary sources of topos theory is algebraic geometry, in particular the study of *sheaves*. To understand what a sheaf is requires some knowledge of topology and the full story about sheaves and their relation to topoi would take us beyond our present scope. The idea is closely tied up with models of intuitionistic logic, but is much more general than that. Indeed, sheaf theory constitutes a whole conceptual framework and language of its own, and to ignore it completely, even at



this stage, would be to distort the overall significance and point of view of topos theory.

For the benefit of the reader unfamiliar with topology we shall delay its introduction and first consider the underlying set-theoretic structure of the sheaf concept, to be called a *bundle*.

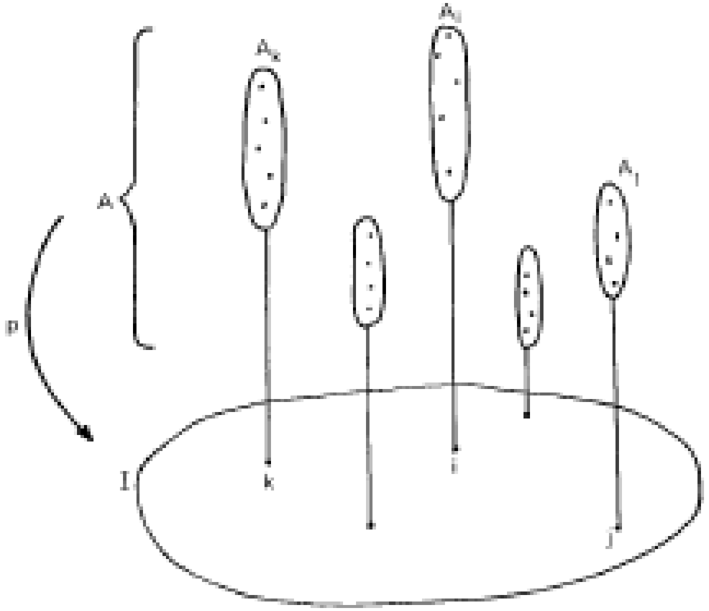
Let us assume we have a collection $\mathscr{A}$ of sets, no two of which have any elements in common. That is, any two members of $\mathscr{A}$ are sets that are disjoint. We need a convenient notation for referring to these sets so we presume we have a set I of *labels*, or *indices*, for them. For each index $i \in I$, there is a set A_i that belongs to our collection, and each member of $\mathscr{A}$ is labelled in this way, so we write $\mathscr{A}$ as the collection of all these A_i's,

$$\mathscr{A} = \{A_i : i \in I\}.$$

The fact that the members of $\mathscr{A}$ are pairwise disjoint is expressed by saying that for *distinct* indices $i, j \in I$

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

We visualise the A_i's as "sitting over" the index set I thus:



J. L. BELL

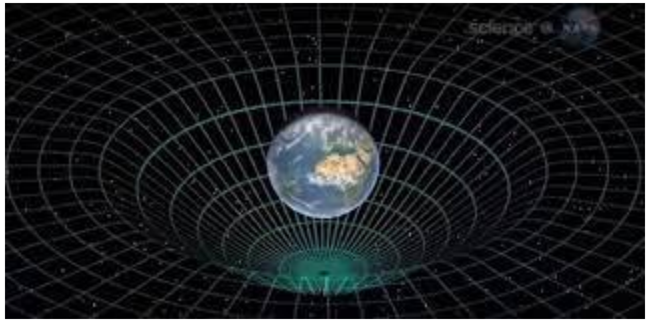
FROM ABSOLUTE TO LOCAL MATHEMATICS

In this paper (a sequel to [1]) I put forward a "local" interpretation of mathematical concepts based on notions derived from *category theory*. The fundamental idea is to abandon the unique absolute universe of sets central to the orthodox set-theoretic account of the foundations of mathematics, replacing it by a plurality of local mathematical frameworks – *elementary toposes* – defined in category-theoretic terms. Such frameworks will serve as local surrogates for the classical universe of sets. In particular they will possess sufficiently rich internal structure to enable mathematical concepts and assertions to be interpreted within them. With the relinquishment of the absolute universe of sets, mathematical concepts will in general no longer possess absolute meaning, nor mathematical assertions absolute truth values, but will instead possess such meanings or truth values only *locally*, i.e., *relative* to local frameworks. There is an evident parallel between this approach to the interpretation of mathematical concepts and the interpretation of physical concepts within the *theory of relativity*: this we discuss in section 2. Section 3 examines the procedure of passing from one local framework to another, observing that it is an instance of the dialectical process of *negating constancy*. In particular, we show (following F. W. Lawvere) how the construction of models of Robinson's nonstandard analysis and the proofs of Cohen's independence results in set theory may be construed as instances of this procedure.

1. CATEGORY THEORY AND LOCAL MATHEMATICAL FRAMEWORKS

Category theory (cf. [2] or [14]) provides a general apparatus for dealing with mathematical structures and their mutual relations and transformations. Invented by Eilenberg and MacLane in the 1940's, it arose as a branch of algebra by way of topology, but quickly transcended its origins. Category theory may be said to bear the same relation to abstract algebra as the latter does to elementary algebra. For elementary algebra results from the replacement of *constant*

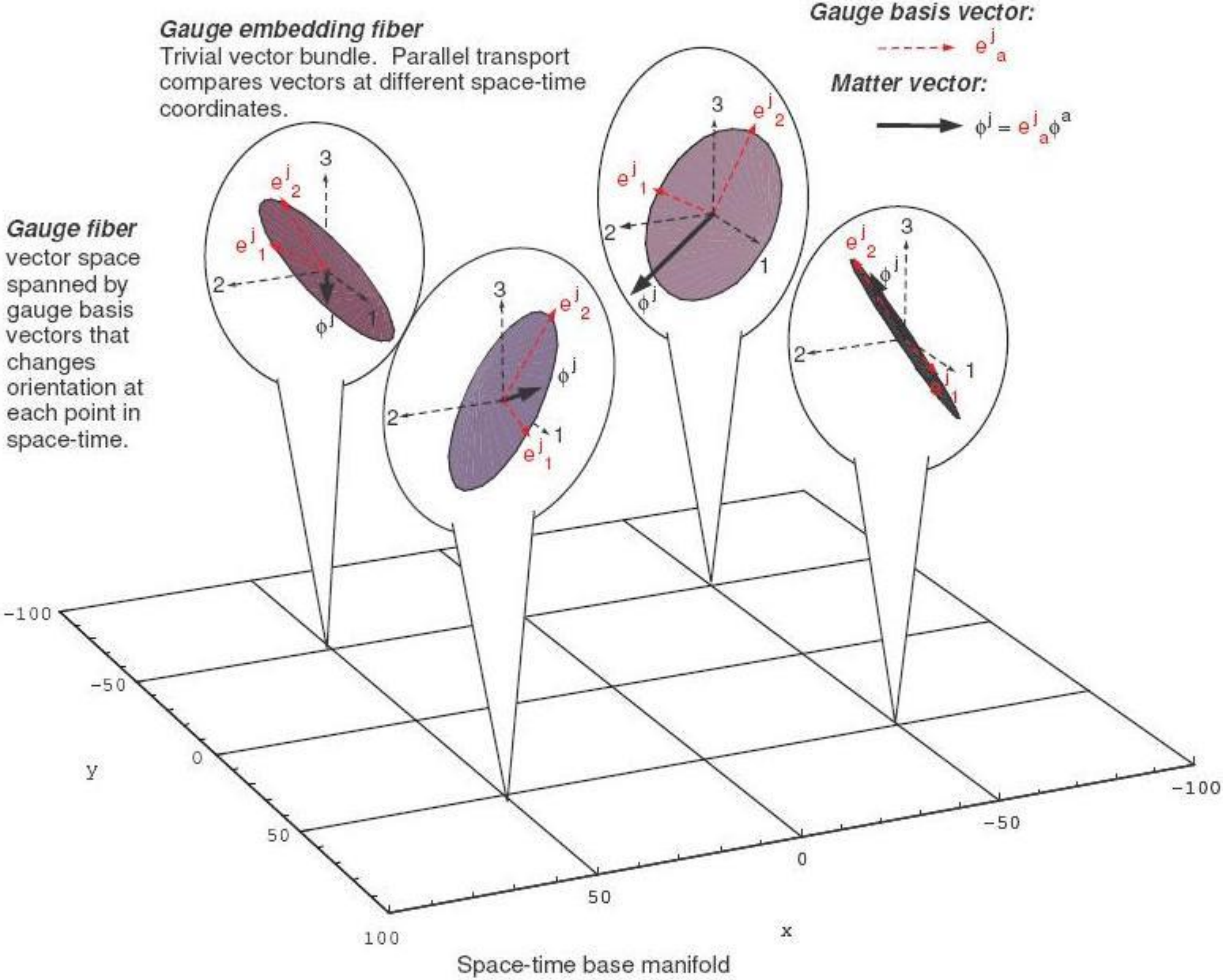
Synthese **69** (1986) 409–426.



Summary

- Gravity described as the curvature of spacetime
  - Fundamental geometric description
- Attempts to unify gravity with SM forces naturally build a geometric description of the forces
  - Difficulties describing forces as additional spacetime dimensions
  - Forces most naturally described by mathematical construct of fiber bundle, local product of a manifold and a fiber
    - Related to gravity in that curvature of fiber bundle gives the force field strength
    - However, fundamental quantized quantity is metric in spacetime and connection in fiber

Un outil mathématique essentiel : Les Fibrés



Tournons nous maintenant vers Spinoza et l'utilisation de cet outillage conceptuel pour la constitution d'une éthique (immanente)…

Une remarque pour commencer : immanence va de pair, en éthique comme en géométrique, avec une approche intrinsèque :

nous ne désirons aucune chose parce que nous la jugeons bonne, mais [qu']au contraire nous appelons bonne la chose que nous désirons ; conséquemment, nous appelons mauvaise la chose que nous avons en aversion

(Eth III, 39, scol.)

Le programme

L'*Éthique* produit en philosophie un mouvement comparable
à celui des *Disquisiones generales circa superficias curvas* de Gauss:
Spinoza y montre qu'on peut retrouver de manière intrinsèque et sans
plonger notre monde dans quelque espace transcendant, une éthique en tous
points comparable à celle que promouvaient ses amis «chrétiens sans
Église»

La clé de la démonstration spinoziste est simple : au lieu de
considérer que le point de départ d'une « éthique » est la donnée
d'une norme valant sur tout l'espace affectif (au sens où elle déterminerait
les désirs qui s'y trouvent plongés au moyen de valeurs
« extérieures »), on considère que c'est le désir qui est donné
primitivement comme système de valorisation « local ». Tout
le problème est alors de comprendre comment on constitue un
espace affectif qui puisse être qualifié « d'éthique » (c'est-à-dire
qui puisse récupérer une forme de cohérence d'ensemble caractérisant une
manière de « bien vivre »).

Qu’est-ce qu’un affect ?

- III. Def3 « Par affect, j’entends les affections d’un corps par lesquelles la puissance d’agir de ce corps est augmentée ou diminuée, aidée ou empêchée, et en même temps les idées de ces affections » (*Per affectum intelligo corporis affectiones quibus ipsius corporis agendi potentia augetur vel minuitur, juvatur vel coercetur et simul harum affectionum ideas*).

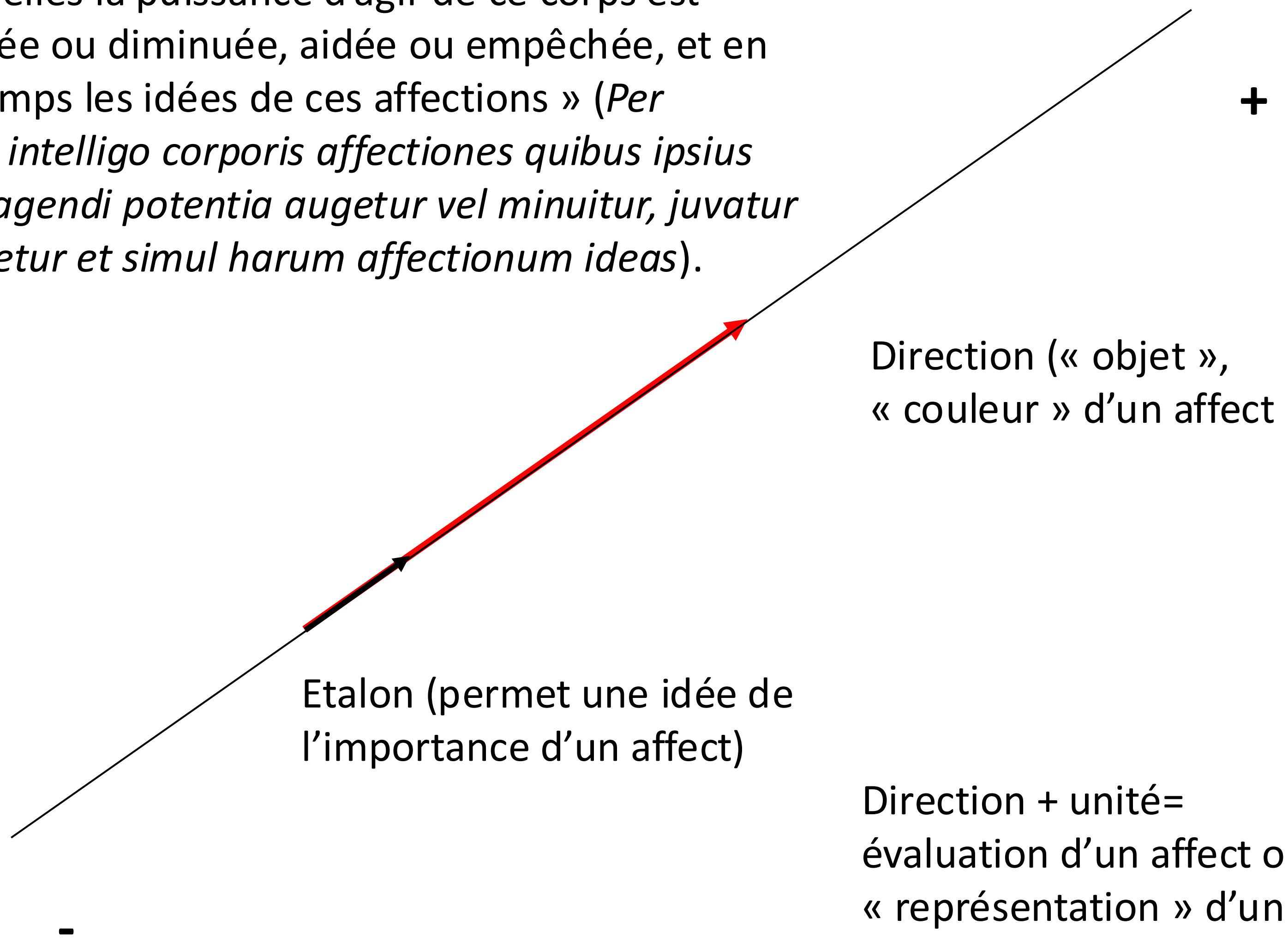
L’objet n’est pas important… il est ce sur quoi se pose un affect et le spécifie… mais le fonctionnement lui-même (joie, tristesse, désir) en est indépendant….

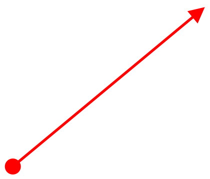
III, 56 : « Autant il y a d’espèces d’objets qui nous affectent, autant il faut reconnaître d’espèces de joie, de tristesse et de désir, et en général de toutes les passions qui sont composées de celles-là ».

À quoi Spinoza ajoute en guise de commentaire : « Quant aux autres espèces d’affects, je ne puis les expliquer ici (parce qu’elles sont aussi nombreuses que les espèces d’objets), et je pourrais le faire que ce serait inutile. Car pour le but que nous nous proposons en ce moment, qui est de déterminer la force des affects et celle de l’esprit dans sa puissance à les déterminer, il suffit d’avoir une définition générale de chaque affect.

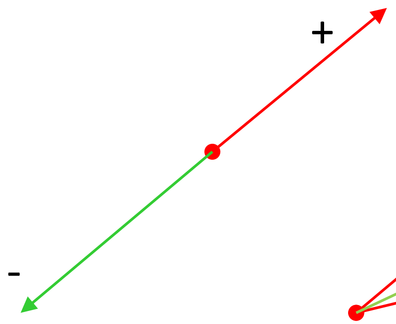
Il suffit, dis-je, de comprendre les propriétés générales des affects et de l’esprit pour déterminer quelle est la nature et le degré de la puissance que l’esprit possède pour modérer et contenir les passions. Ainsi donc, bien qu’il y ait une grande différence entre tel et tel affect d’amour, de haine ou de désir, par exemple, entre l’amour qu’on a pour ses enfants et celui qu’on a pour une épouse, il n’est point nécessaire à notre objet de connaître ces différences, et de pousser plus loin la recherche de la nature et de l’origine des affects.

III. Def3 « Par affect, j’entends les affections d’un corps par lesquelles la puissance d’agir de ce corps est augmentée ou diminuée, aidée ou empêchée, et en même temps les idées de ces affections » (*Per affectum intelligo corporis affectiones quibus ipsius corporis agendi potentia augetur vel minuitur, juvatur vel coercetur et simul harum affectionum ideas*).

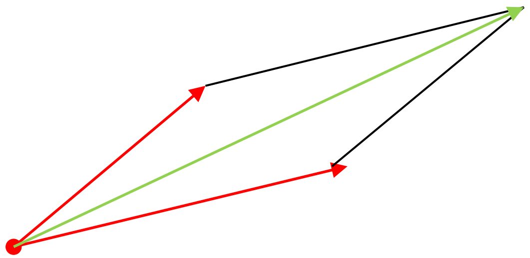




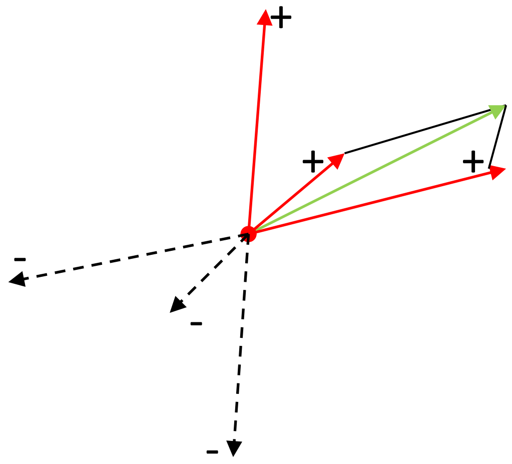
Un affect a
une direction
et une
grandeur



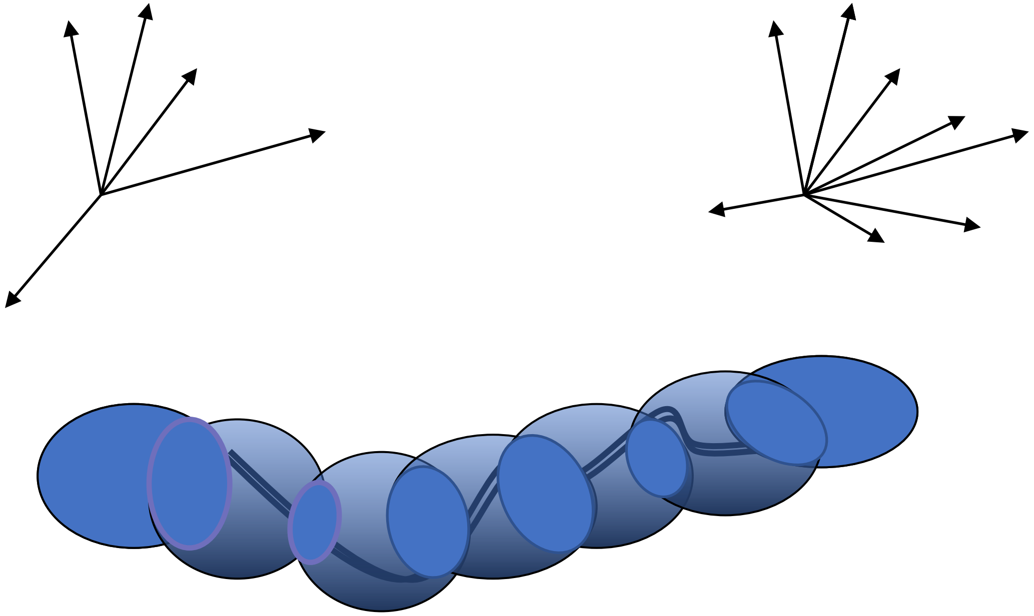
Un affect peut en
neutraliser un autre



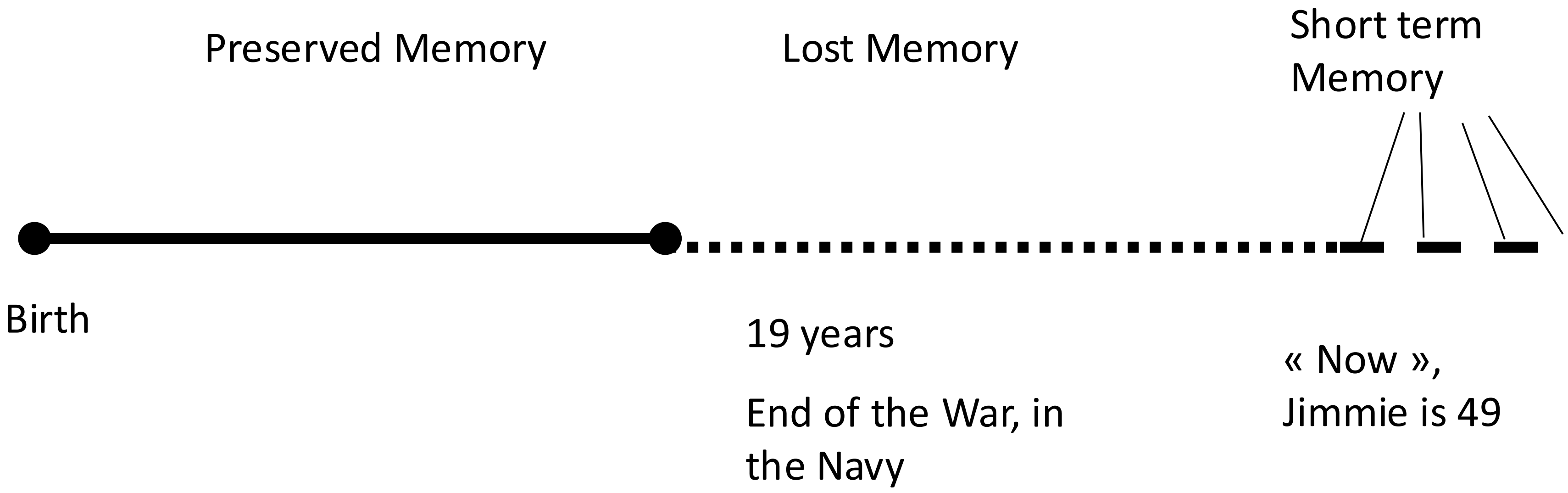
On peut évaluer dans
quelle direction tendent
plusieurs affects



La logique des affects



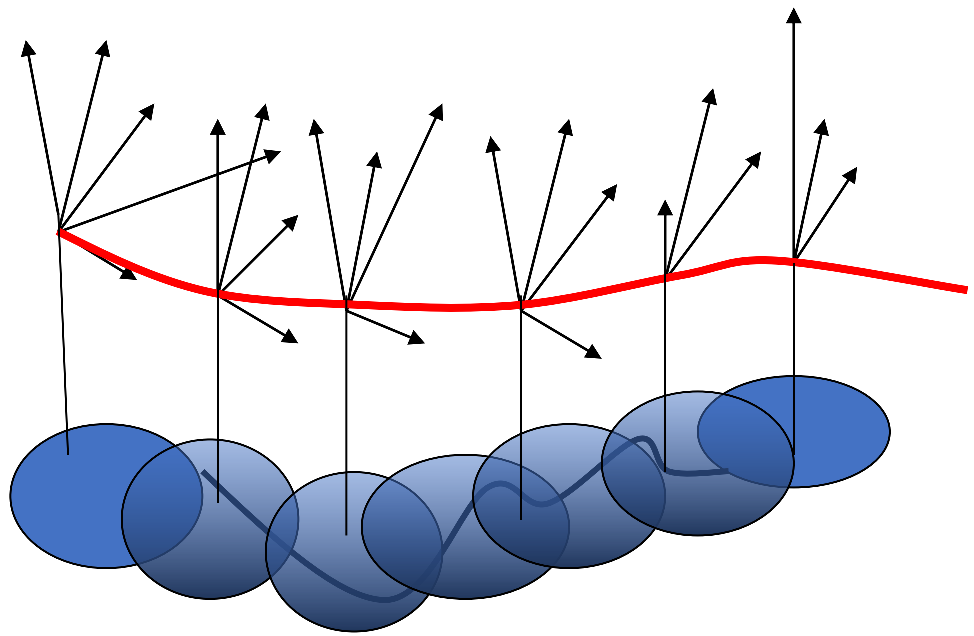
Pourquoi ne pas écraser les variations affectives dans l’espace de base ? Un exemple typique où l’espace de base montre son autonomie : le cas de Jimmie G (Syndrôme de Korsakoff)



« Il s’étonnait, ou bien restait indifférent – car c’était réellement un homme qui n’avait pas d’“hier”. Ses écrits restaient, si j’ose dire, déconnectés et déconnectants, ne pouvant en aucun cas lui rendre le sens du temps ou de la continuité. Pire, ils étaient insignifiants (“OEufs au petit déjeuner” – “Regardé un jeu de base ball à la tv”), et ne touchaient jamais le fond de son être… Mais existait-il un fond, la profondeur d’un sentiment ou d’une pensée durable chez cet homme sans mémoire, ou en était-il réduit à une sorte de radotage “humien”, à une simple succession d’impressions et d’événements sans lien entre eux ? »

(Oliver Sacks *L’Homme qui prenait sa femme pour un chapeau* (1985, tr. fr. Seuil, 1992). p. 56).

Un espace affectif…



Un résultat important : on récupère déjà la théorie de la béatitude, qui est indépendante de l’existence ou non d’un point de vue global

En route vers la béatitude

PROPOSITION XXV

Le suprême effort de l'Âme et sa suprême vertu est de connaître les choses par le troisième genre de connaissance.

DÉMONSTRATION

Le troisième genre de connaissance va de l'idée adéquate de certains attributs de Dieu à la connaissance adéquate de l'essence des choses (voir la définition de ce genre de connaissance dans le Scolie 2 de la Prop. 40, p. II) ; et plus nous connaissons les choses de cette manière, plus (Prop. précéd.) nous connaissons Dieu ; par suite (Prop. 28, p. IV), la suprême vertu de l'Âme c'est-à-dire (Défin. 8, p. IV), la puissance ou la nature de l'âme, ou, ce qui revient au même (Prop. 7, p. III), son suprême effort est de connaître les choses par le troisième genre de connaissance. C.Q.F.D.

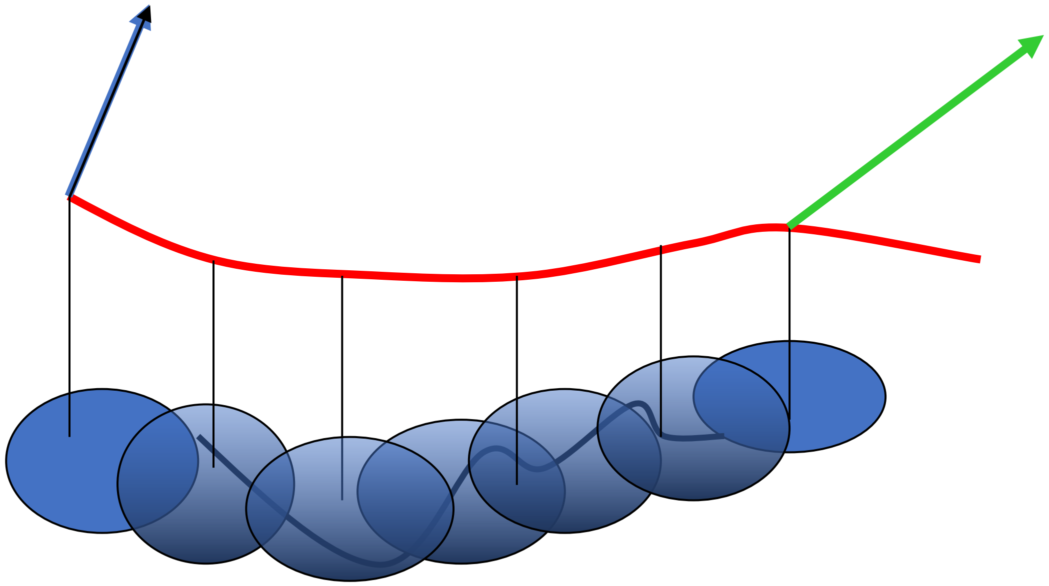
PROPOSITION XXVI

Plus l'Âme est apte à connaître les choses par le troisième genre de connaissance, plus elle désire connaître les choses par ce genre de connaissance

PROPOSITION XXVII

De ce troisième genre de connaissance naît le contentement de l'Âme le plus élevé qu'il puisse y avoir.

Un problème : comment définir une connexion sur cette espace ? (une manière de comparer les affects en différents lieux)



Le conatus a deux sens : local et connexion….

Conatus II

- III, 6: *Toute chose, autant qu'il est en elle, s'efforce de persévérer dans son être.*

Unaquæque res quantum in se est, in suo esse perseverare conatur.

- III, 7: *L'effort par lequel toute chose tend à persévérer dans son être n'est rien de plus que l'essence actuelle de cette chose.*

Conatus quo unaquæque res in suo esse perseverare conatur, nihil est præter ipsius rei actualem essentiam

Résultats
Et questions ouvertes :

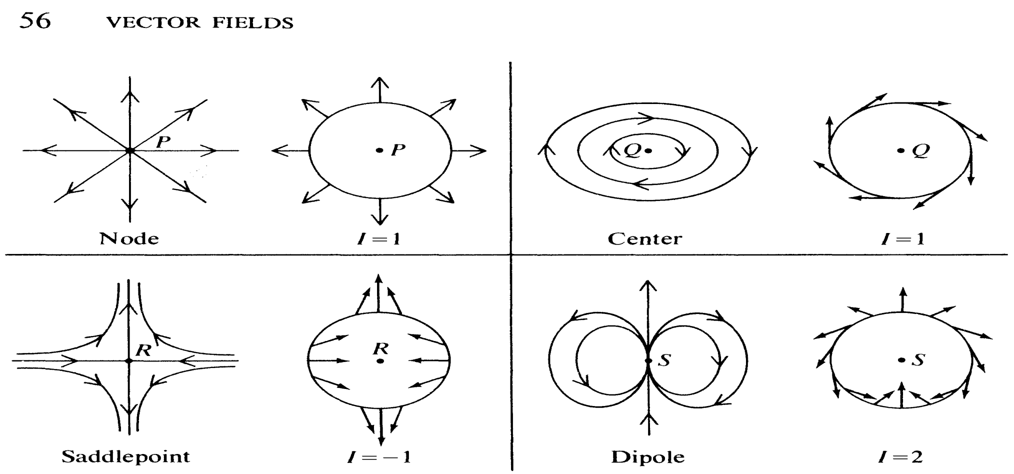
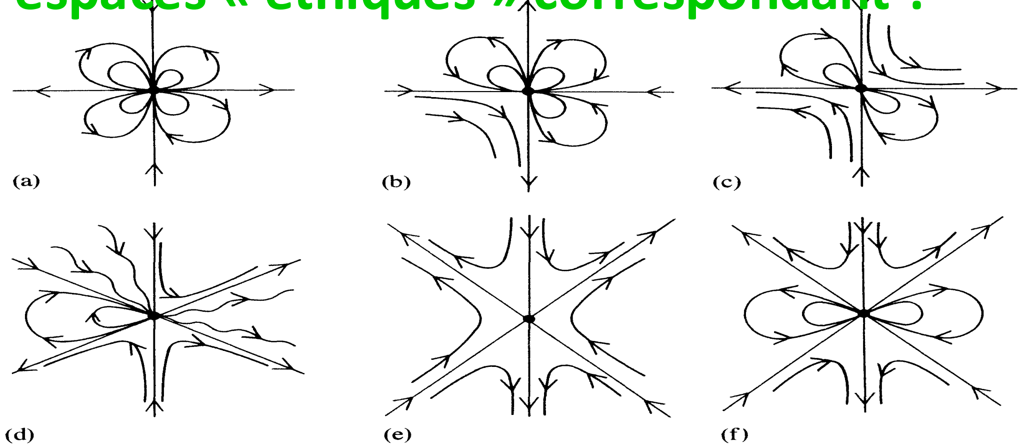


Figure 9.2

- Peut-on envisager des classifications des types d'espaces affectifs ?
- Peut-on imaginer des espaces « éthiques » correspondant ?



III. Quelques réflexions éparses sur le local et l'obstruction….

D. Rabouin, « Universel local. Achèvement du (néo-)spinozisme français ou 'Français, encore un effort pour être systématiques !' », *Les Temps modernes* 2015/1 (n° 682), numéro spécial : « La philosophie française a-t-elle l'esprit de système ? », pp. 20-47.