

De l'obstacle à l'obstruction, selon la grande tradition mathématique

Y.A.

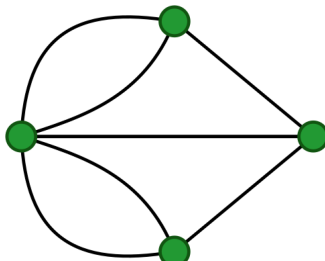
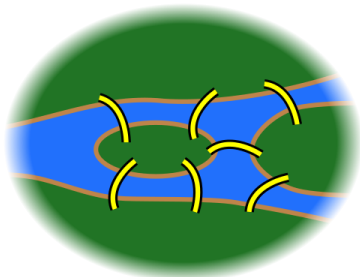
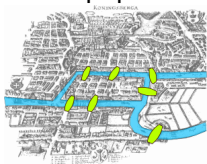
3/2026

(P. Valéry) *Un état bien dangereux: croire comprendre.*

Les précurseurs

Euler. **Obstacle à circuler**

Les sept ponts de Königsberg



Euler à Ehler 1736

'Ainsi voyez-vous, très noble Monsieur, que ce type de solution n'a que peu à voir avec les mathématiques, et je ne comprends pas pourquoi vous vous attendez à ce qu'un mathématicien la produise plutôt que quiconque, car *la solution dépend de la seule raison, et sa découverte ne dépend d'aucun principe mathématique.*

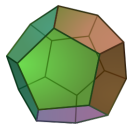
A ce propos, j'ignore pourquoi certaines questions qui ont si peu de lien avec les mathématiques sont parfois résolues plus rapidement par des mathématiciens que par d'autres.'

Obstruction: parité.

Naissance de la théorie des graphes.

Caractéristique d'Euler

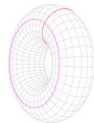
$$\chi = S - A + F$$



$$\chi = 20 - 30 + 12 = 2$$

Betti (après discussion avec Riemann \sim 1860) définit ses nombres b_i :

$$\chi = \sum (-1)^i b_i$$



$$\chi = 1 - 2 + 1 = 0$$

(P. Valéry) *Les conventions sont arbitraires, ou du moins se donnent pour telles ; or, il n'y a pas de scepticisme possible à l'égard des règles d'un jeu. Ce mot peut scandaliser. Faire entendre que l'art classique est un art qui s'oriente vers l'idéal du jeu, tant il est conscient de soi-même, et tant il préserve à la fois la rigueur et la liberté, c'est sans doute choquer ; mais ce n'est, je l'espère, que choquer un instant, le temps même qu'il vous souvienne que la perfection chez les hommes ne consiste et ne peut consister qu'à remplir exactement une certaine attente que nous nous sommes définie.*

Poincaré (~ 1895 'Analysis situs') 'remplace' les variétés X par des 'complexes cellulaires', et les nombres de Betti b_i par des espaces linéaires $H^i(X)$ construits de manière combinatoire ($b_i = \dim H^i(X)$).

Gain: la variance, qui relie linéairement ces espaces.
(+ dualité, produits d'intersection etc.)

(P. Valéry) *Le siècle se montrait aussi incapable de renoncer à la multiplication des lettrés que de leur assigner des moyens d'existence.*

Que d'amertumes alors ! que de tristesses ! que de vies manquées ! appelées à la plus haute culture et vouées, du même coup, au dénuement ou aux besoins les plus basses. Il arrivait que les diplômes fussent des garanties de malheur et des recommandations à la détresse. On élevait de jeunes pauvres à des connaissances de pur luxe. On leur faisait sentir assez durement que les éléments les plus conscients d'une société en sont aussi les plus négligeables.

Galois. Obstacle à résoudre (avec des formules).

Racines vs. radicaux, une démarche radicale (1830)

$$0 = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n = c_n(x - r_1) \dots (x - r_n)$$

'Théorie de l'ambiguïté'

Ambiguïté des racines: obstacle -> groupe (objet mathématique d'un type nouveau).

(sauvetage de l'oubli par Liouville et Betti) \rightsquigarrow Naissance de la théorie des groupes.

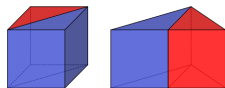
Klein: 'la grande portée de l'oeuvre de Galois tient au fait que sa théorie originale des équations algébriques est une application systématique des deux notions fondamentales de groupe et d'invariant, notions qui tendent à dominer la science mathématique.'

Deleuze: 'à partir d'un corps de base, les adjonctions successives à ce corps permettent une distinction de plus en plus précise des racines. Il y a donc une cascade de résolvantes partielles ou un emboîtement de groupes. Le groupe de l'équation caractérise à un moment, non pas ce que nous savons des racines, mais l'objectivité de ce que nous n'en savons pas. Ce non-savoir n'est plus un négatif, une insuffisance, mais une règle, un apprendre.'

(P. Valéry) *En vérité, je ne sais pas comment une âme peut garder son courage, à la seule pensée des immenses réserves d'écriture qui s'accumulent dans le monde. Quoi de plus vertigineux, quoi de plus confondant pour l'esprit que la contemplation des murs cuirassés et dorés d'une vaste bibliothèque; et qu'y a-t-il aussi de plus pénible à considérer que ces bancs de volumes, ces parapets d'ouvrages de l'esprit qui se forment sur les quais de la rivière, ces millions de tomes, de brochures échoués sur les rives de la Seine, comme des épaves intellectuelles rejetées par le cours du temps qui s'en décharge et se purifie de nos pensées ? Le cœur défaille en présence du nombre des œuvres, que dis-je ? du nombre même des chefs-d'œuvre... L'idée d'écrire s'assimile à l'idée d'ajouter à l'infini, et le goût de la cendre vient aux lèvres.*

Dehn. Obstacle à découper (1900).

3ème Problème de Hilbert: Etant donnés deux polyèdres de même volume, est-il possible de découper le premier en petits polyèdres, et de les rassembler pour former le second?



Non. Obstruction de Dehn: $(\sum_{\text{arêtes}} \text{longueur(arête)} \otimes \text{angle(faces adjacentes)})$.

Cousin. Obstacle à construire des fonctions localement prescrites
(1895).

Prémices de la théorie homologique des variétés analytiques
(Oka-Cartan \sim 1950.)

(P. Valéry) *Nous faisons, d'ailleurs, en ces matières difficiles et sublimes, des raisonnements si légers que nous assignons, avec une inconséquence remarquable, la dignité la plus élevée aux auteurs que nous déclarons inspirés. Nous croyons de ceux-ci qu'ils sont de purs instruments d'un certain souffle étranger à eux-mêmes et presque à la nature ; nous en faisons des roseaux parlants. Au contraire, et malgré la superstition récente, je reconnais un principe particulier de gloire à celui qui choisit, qui ne fait mine d'ignorer les beautés acquises, ou qui reprend dans son heureuse connaissance des trésors que le temps a formés, les moyens de sa perfection. Le mystère du choix n'est pas un moindre mystère que celui de l'invention.*

Leray. Obstacle à passer du local au global (1945).

Théorie des faisceaux. Condition de recollement (de données locales compatibles).

[Réécouter la première partie de l'exposé mamuphi de D. Rabouin.]

(P. Valéry) *Un livre est un instrument de plaisir ; il veut l'être du moins. Il a le plaisir pour objet. Ce plaisir du lecteur est entièrement indépendant du mal que nous avons pris à lui faire un livre. Que me fait le premier inventeur ? Ce n'est point la peine qu'il prit qui me touche. Je ne me nourris pas de son nom, et je ne jouis point de son orgueil. Je consomme un instant parfait. .*

La fondation

Eilenberg. Algèbre homologique (1950).

Co-crédation de la théorie des catégories d'abord (avec MacLane),
puis de l'algèbre homologique (avec Cartan)
+ Grothendieck: cohomologie des faisceaux abéliens.

$$\rightarrow H^i(X, F) \rightarrow H^i(X, G) \rightarrow H^i(X, G/F) \rightarrow H^{i+1}(X, F) \rightarrow H^{i+1}(X, G) \rightarrow$$

Vaste et puissante machinerie abstraite.

Techniques de calcul de ces groupes. Critères de nullité (Cousin:
 $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$).

(P. Valéry) *Entre les amateurs d'une beauté qui n'offrait pas de résistance et les amants de celle qui exige d'être conquise, entre ceux qui tenaient la littérature pour un art d'agrément immédiat, et ceux qui poursuivaient sur toute chose une expression exquise et extrême de leur âme et du monde, obtenue à tout prix, il se creusa une sorte d'abîme ; mais abîme traversé dans les deux sens de quolibets et de risées, qui sont des signaux que tous entendent. On traitait les initiés d'initiés, et ils ne refusaient point cette épithète.*

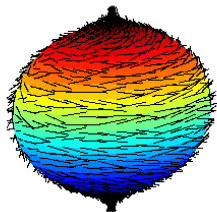
Quelques applications

Eilenberg-Cartan. Obstacle à assembler/scinder.

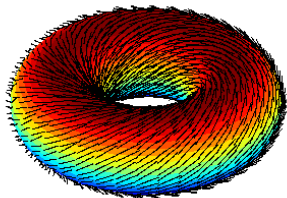
Exemples. Théorie des groupes - extensions $\leftrightarrow H^2(G, A)$.

Brouwer. Obstacle à peigner.

Théorème de la boule chevelue (1912)



$$\chi = 2$$



$$\chi = 0$$

(P. Valéry) *Quoi de plus précieux que l'illusion délicieuse de la clarté qui nous donne le sentiment de nous enrichir sans effort, de goûter du plaisir sans peine, de comprendre sans attention, de jouir du spectacle sans payer ? Heureux les écrivains qui nous ôtent le poids de la pensée et qui tissent d'un doigt léger un lumineux déguisement de la complexité des choses! Hélas certains, dont il faut bien déplorer l'existence, se sont engagés dans une voie toute contraire. Ils ont placé le travail de l'esprit sur le chemin de ses voluptés. Ils nous proposent des énigmes. Ce sont des êtres inhumains.*

Kodaira-Spencer (\sim 1960). Obstacle à déformer.

Obstructions à déformer X_0 , $H^2(X_0, T_{X_0})$.

Déformation $X/S \rightsquigarrow$ application linéaire $(T_S)_0 \rightarrow H^1(X_0, T_{X_0})$.

Exemple: $3g-3$ 'modules' de déformations d'une courbe algébrique X_0 de genre $g > 1$ (Riemann).

Déploiement des singularités.

Déformations des représentations galoisiennes \rightsquigarrow théorème de Fermat (Wiles 1995)

Conclusion provisoire

Obstacles à *circuler*, à *découper*, à *assembler*, à *étendre*, à *construire*, à *déformer*, à *déployer* etc.

Tant d'obstacles que la théorie interprète/*incarne* en termes d'obstructions', qui sont des objets mathématiques à part entière, d'un type nouveau: *des 'classes' bien précises vivant dans des espaces de cohomologie bien précis.*

Lorsque la classe est nulle, l'obstacle initial disparaît.

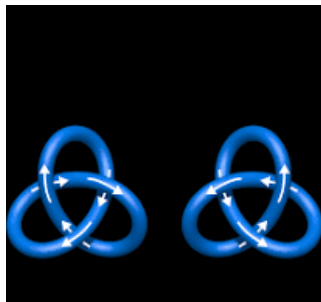
- Une situation générale plutôt qu'une théorie unifiée.

Plus qu'un outil formidablement efficace, une manière de penser toujours d'actualité...

Une panacée?
Sûrement pas!

Les apories

Dehn. Obstacle à dénouer les noeuds, ou décider s'ils sont semblables (1910). Longue histoire toujours ouverte...



Novikov. Obstacle à réduire les mots (1955). Indécidable en général

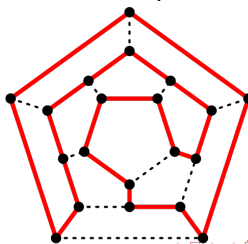
(P. Valéry) *L'art classique dit au poète : Tu ne sacrifieras point aux idoles, qui sont les beautés de détail. Tu ne te serviras point de tous les mots, dont il en est de rares et de baroques qui tirent à eux toute l'attention et qui brillent vainement aux dépens de ta pensée. Tu n'éblouiras pas à peu de frais et tu ne spéculeras pas sur l'insolite. Tu ne chercheras point à foudroyer, car tu n'es pas un dieu, quoique tu penses ; mais seulement, communique aux hommes, si tu peux, l'idée d'une perfection d'homme..*

Hilbert. Problème de la décision (1928).

Church, Turing (réponse négative (1936)).

Circuits eulériens (passer une seule fois par chaque arête): résolu en 1736.

Circuits hamiltoniens (passer une seule fois par chaque sommet):



ouvert et difficile (NP complet).



Au-delà de la tradition mathématique: comment passer de l'obstacle à une obstruction conceptualisée et incarnée, comment penser une théorie de l'obstruction en art, en politique etc.?

Euler: 'je ne comprends pas pourquoi vous vous attendez à ce qu'un mathématicien la produise plutôt que quiconque, car *la solution dépend de la seule raison, et sa découverte ne dépend d'aucun principe mathématique*'.