Atelier mamuphi : *Des équations abéliennes*
Ircam - 14 octobre 2023

- François NICOLAS -

Au principe de cet atelier…

1. Cet atelier est disposé sous l'axiome d'une « *égalité des intelligences* ».
2. Cet atelier est l'affaire de *mathématiciens aux pieds nu*s.
3. Les théories mathématiques ici examinées sont susceptibles de trois types d'interprétation : *intra-mathématique*, *intra-scientifique* et *extra-scientifique.*
4. Le troisième type d'interprétation – la r*ai*sonance donc - constitue la motivation essentielle de cet atelier.
5. Ce type de diagonale fait alors cheminer la lumière mathématique selon une *lumière rasante* qui révèle les reliefs par des *ombres portées*.
6. L'évaluation d'une telle diagonale dépendra alors d'une *fécondité de l'imaginaire* ainsi levé.
7. Pour engager tout ceci, il importe préalablement de sélectionner soigneusement *la théorie mathématique* susceptible d'une telle lumière rasante sur des enjeux qui l'outrepassent.

Expression	***Ordre***	***Degré***
a+b	0	0
$a+\sqrt{b}$	1	1
$\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$	1	2
$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$	2	1
$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt[3]{b}}$	2	2

Théorème sur la forme standard de l'équation algébrique

Soit v une expression algébrique d'ordre μ et de degré m.
Alors

$$v = q_0 + \sqrt[n]{p} + q_2\sqrt[n]{p^2} + \cdots + q_{n-1}\sqrt[n]{p^{n-1}}$$

où m est premier,
q_i sont des expressions algébriques d'ordre μ et de degré au plus (m-1)
et p une expression algébrique d'ordre μ telle que $\sqrt[n]{p}$ ne peut être exprimé comme fonction rationnelle des q_i.

Newton

$$r_1^3+r_2^3+r_3^3=$$

$$(r_1+r_2+r_3)^3-3(r_1r_2+r_2r_1^2+r_1r_3^2+r_3r_1^2+r_2r_3^2+r_3r_2^2)-6r_1r_2r_3=$$

$$(r_1+r_2+r_3)^3-3(r_1+r_2+r_3)(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)+3r_1r_2r_3$$

Si on pose

$$a=r_1+r_2+r_3$$

$$b=r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1$$

$$c=r_1r_2r_3$$

on a $r_1^3+r_2^3+r_3^3=-a^3+3ab-3c$.

Soit l'équation $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ à 4 racines $\{p, q, r, s\}$

Posons :

1. $S_1=p+q+r+s$
2. $S_2=pq+qr+rs+sp$
3. $S_3=pqr+qrs+rsp+spq$
4. $S_4=pqrs$

Comme $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$, on a :

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=x^4-(p+q+r+s)x^3+(pq+qr+rs+sp)x^2-(pqr+qrs+rsp+spq)x+pqrs=0$$

et donc

1. $a=-S_1$
2. $b=S_2$
3. $c=-S_3$
4. $d=S_4$

Abel

1821

Démonstration (erronée) de la résolubilité de l'équation quintique !

1824

Mémoire sur les équations algébriques où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré

1826

Démonstration de l'impossibilité de la résolution des équations algébriques générales d'un degré supérieur au quatrième.

1827

Solutions par fonctions elliptiques

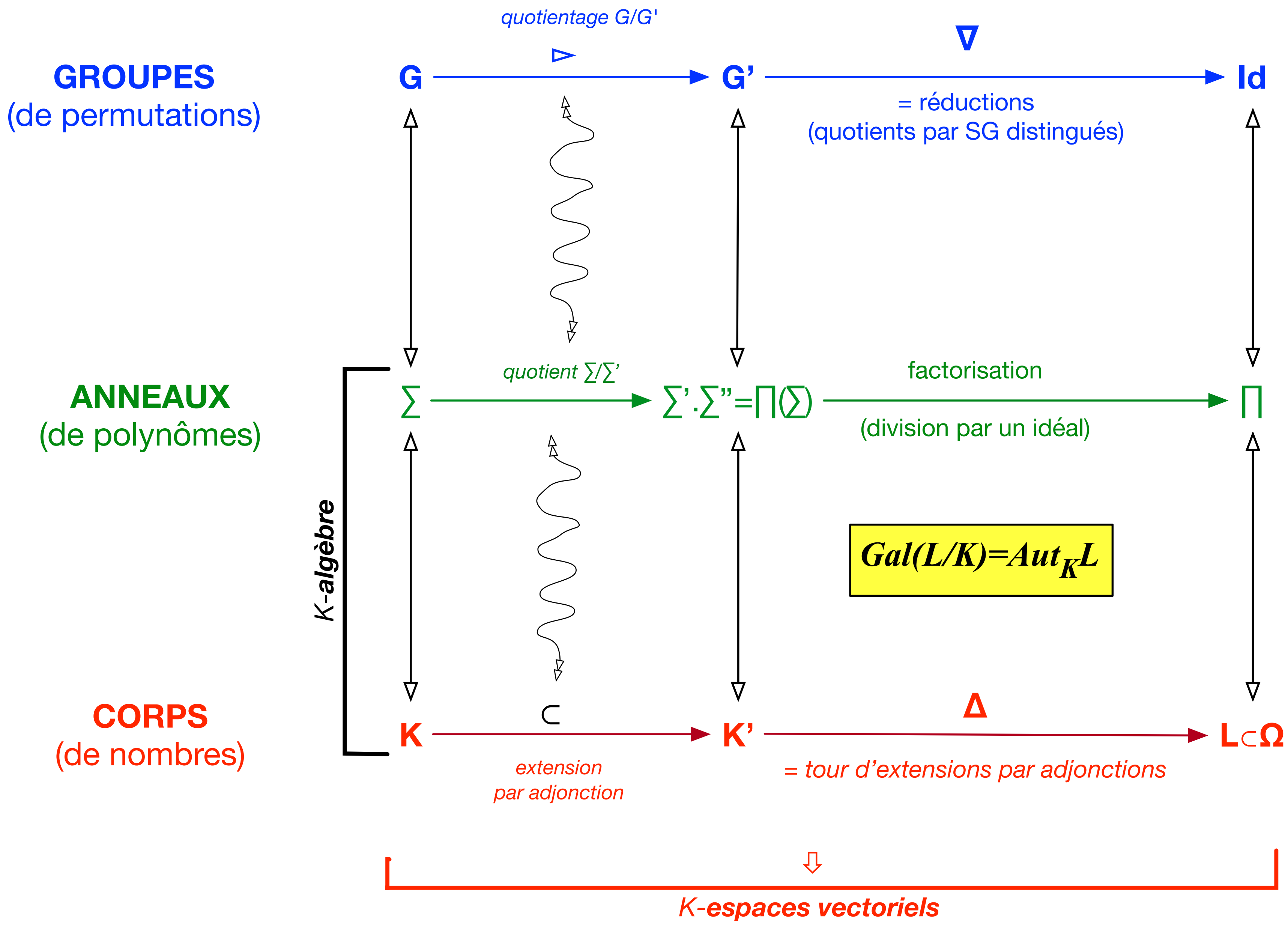
1828

Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement

1829

Mémoire posthume : *Sur la résolution algébrique des équations* (1828-1829)

Correspondance de Galois (1831)



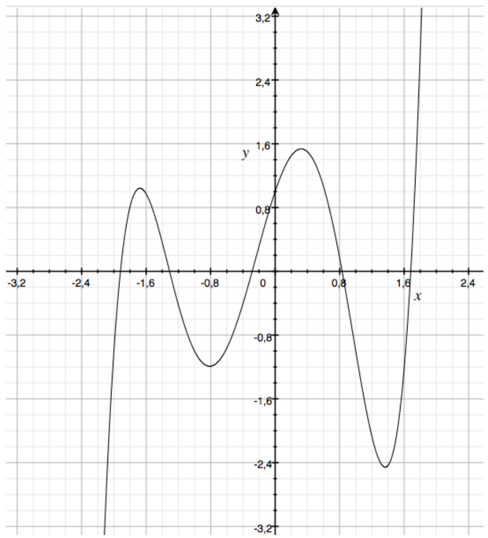
Leopold Kronecker (1823-1891)

« Postulat d'Abel » (1861)

« Résoudre une équation signifie la remplacer par une chaîne d'équations de nature prédéterminée ; l'essence de la "chaîne" consiste en ce qu'une grandeur est toujours déterminée à partir d'une équation pour les suivantes. Lors de la résolution par équations pures, la proposition découverte par Abel - sur laquelle repose essentiellement la preuve d'impossibilité d'Abel - est valable : <u>toutes les grandeurs introduites successivement sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation à résoudre</u>. L'exigence selon laquelle, lors de chaque résolution, les grandeurs successives sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation à résoudre, doit être appelée "<u>postulat d'Abel</u>". La justification de ce postulat réside dans le fait que, si l'on abandonne le postulat, les équations du même genre nécessitent des méthodes de résolution différentes, et que donc, lors de la médiation par des fonctions irrationnelles, la division des fonctions algébriques en genres est rompue. Le postulat d'Abel est donc identique à l'exigence qu'<u>on ne doit pas introduire de méthodes de résolution d'équations algébriques qui séparent des équations appartenant au même genre</u>. »

Un exemple

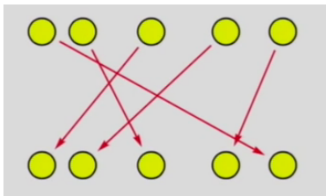
$$x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1=0$$



Elle a cinq racines réelles {A≃-1,92… ; B≃-1,311… ; C≃-0,28… ; D≃0,83… ; E≃ 1,68…} algébriquement reliées par $\theta(x)=x^2-2$:

$$E=\theta(A)=A^2-2$$
$$D=\theta(E)=E^2-2 \Longrightarrow D=\theta^2(A)=(A^2-2)^2-2$$
$$B=\theta(D)=D^2-2 \Longrightarrow B=\theta^2(E)=\theta^3(A)=[(A^2-2)^2-2]^2-2$$
$$C=\theta(B)=B^2-2 \Longrightarrow C=\theta^2(D)=\theta^3(E)=\theta^4(A)=\{[(A^2-2)^2-2]^2-2\}^2-2$$
$$A=\theta(C)=C^2-2 \Longrightarrow A=\theta^2(B)=\theta^3(D)=\theta^4(E)=\theta^5(A)=\langle\{[(A^2-2)^2-2]^2-2\}^2-2\rangle^2-2$$

Soit le groupe cyclique suivant :



Lagrange (1770 et1781)

« *La théorie des équations est celle qu'on eût cru devoir acquérir les plus grands degrés de perfection. […] On a, à la vérité, épuisé presque tout ce qui concerne la nature des équations, leur transformation. […] À l'égard de la résolution des équations littérales, on n'est guère plus avancé qu'on ne l'était du temps de Cardan. […] Les premiers succès des analystes italiens dans cette matière paraissent avoir été le terme des découvertes qu'on pouvait y faire*. » (*Réflexions sur la résolution algébrique des équations ;* 1770)

« *Je commence à sentir que ma force d'inertie augmente peu à peu, et je ne réponds pas que je fasse encore de la Géométrie dans dix ans d'ici. Il me semble aussi que la mine est presque déjà trop profonde, et qu'à moins qu'on ne découvre de nouveaux filons, il faudra tôt ou tard l'abandonner. La physique et la chimie offrent maintenant des richesses plus brillantes et d'une exploitation plus facile ; aussi le goût du siècle paraît-il entièrement tourné de ce côté-là, et il n'est pas impossible que les places de la Géométrie dans les Académies ne deviennent un jour ce que sont actuellement les chaires d'arabe dans les Universités*. » (Lettre à d'Alembert du 21 septembre 1781)

Delambre (1808)

« *Il serait difficile et peut-être téméraire d'analyser les chances que l'avenir offre à l'avancement des mathématiques : dans presque toutes les parties, on est arrêté par des difficultés insurmontables ; des perfectionnements de détail semblent la seule chose qui reste à faire. [...] Toutes ces difficultés semblent annoncer que la puissance de notre analyse est à peu près épuisée, comme celle de l'algèbre ordinaire l'était par rapport à la géométrie transcendante au temps de Leibniz et de Newton, et qu'il faut des combinaisons qui ouvrent un nouveau champ au calcul des transcendantes et à la résolution des équations qui les contiennent*. » (*Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789 et sur leur état actuel,* 1808 ; p. 99)

Cauchy (1811)

« *On est tenté de croire que les connaissances de l'homme peuvent croître et se multiplier à l'infini.* »

« *Cependant si l'on observe que toute notre intelligence et nos moyens sont renfermés entre des limites qu'ils ne peuvent jamais franchir, on se persuadera sans peine que nos connaissances sont bornées comme nos facultés.* »

« *Que dirais-je des sciences exactes : la plupart paraissent parvenues à leur plus haute période. L'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, les mathématiques transcendantes sont des sciences que l'on peut regarder comme terminées, et dont il ne reste plus à faire que d'utiles applications*. »

Discours *Sur les limites des connaissances humaines* le 14 novembre 1811 à Cherbourg

Olivier Debarre

« *Les mathématiciens du temps de Galois attendaient un critère général [de résolubilité des équations de degré premier] ne faisant intervenir que les coefficients de l'équation et permettant de savoir, par simple inspection de ce coefficient, si l'équation était ou non résoluble par radicaux. […] La théorie de Galois allait bien au-delà du problème, somme toute très artificiel, de la résolution par radicaux des équations algébriques. Galois avait en fait propulsé tout le domaine de l'algèbre dans un nouveau monde : celui des groupes, des extensions de corps, et de bien d'autres concepts fondamentaux des mathématiques d'aujourd'hui. En particulier, de nos jours on s'est rendu compte qu'il est bien plus important de savoir calculer le groupe de Galois d'un polynôme, plutôt que de savoir s'il est résoluble par radicaux*. »

Quatre théorèmes (1828)

- [I] Si une seule racine d'une équation irréductible $\varphi(x)=0$ satisfait également une autre équation rationnelle $f(x)=0$ [1], alors toutes les racines de $\varphi(x)=0$ satisfont également $f(x)=0$.
- [III] Une équation irréductible est algébriquement résoluble si toutes ses racines peuvent être rationnellement exprimées par

$$x,\ \theta(x),\ \theta^2(x),\ \ldots,\ \theta^{n-1}(x) \text{ avec } \theta^n(x)=x$$

  où $\theta(x)$ désigne une fonction rationnelle de x et de quantités connues.
- [IV] Une équation irréductible *dont le degré est un nombre premier* est algébriquement résoluble si deux de ses racines peuvent s'exprimer rationnellement l'une par l'autre.
- [VIII] Une équation irréductible est algébriquement résoluble si toutes ses racines ρ_j peuvent être rationnellement exprimées au moyen de l'une d'entre elles - soient r et $\rho_j=\theta_j(r)$ - et si, $\forall j$ et $\forall k$, on a alors la commutation $\theta_j[\theta_k(r)]=\theta_k[\theta_j(r)]$.

Problèmes de démonstration

- III : démonstration équivalente à la méthode employée par Gauss pour résoudre les équations du type $x^n-1=0$ en représentant toutes ses racines sous la forme $\theta^i(x)$ avec $i=\{0, 1, \ldots, n-1\}$.
  En effet, on sait alors – via la résolvante de Lagrange - que l'équation $\theta(x)=0$ est cyclique :

$$\sum\alpha^i.\theta^i(x) \text{ avec } i=\{0, n-1) \text{ où } \alpha^i \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ racine complexe de } \sqrt[n]{1}.$$

  Voir la suite de la démonstration chez Houzel (p. 59) ou Sørenzen (p. 145)
- IV : démonstration en ramenant ce cas à celui qui précède car on part, comme dans l'exemple de notre équation abélienne $x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1=0$, de $y=\theta(x) \Longrightarrow z=\theta(y)=\theta^2(y)\ldots$

[1] où $f(x)$ mobilise des quantités intervenant déjà dans $\varphi(x)$

Équations quintiques

réductibles (et donc résolubles)	**abéliennes** (irréductibles mais résolubles)
$\nexists$ *réductibles **et** insolubles*	**insolubles** (et donc irréductibles)

Résolvantes de Lagrange

Exemple

1) $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \Longrightarrow$

- $a_1=-(r_1+r_2+r_3)$
- $a_2=r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1$
- $a_3=-r_1r_2r_3$

2) Soit $L=r_i+jr_j+j^2r_k$ avec $j^3=1+j+j^2=1$. L^3 prendra alors seulement deux valeurs : u^3 et v^3 avec

- $u=r_1+jr_2+j^2r_3$
- $v=r_1+jr_3+j^2r_2$

Ces deux valeurs sont solution de l'équation $y^2-(u^3+v^3)y+u^3v^3=y^2-Sy+P=0$ où S et P sont symétriques en les racines. On sait alors, par le théorème de Newton, que S et P sont calculables à partir des a_i. Attention : le calcul peut être très compliqué mais on sait qu'il existe !

S et P étant résolubles, u^3 et v^3 le sont aussi.

3) Reste alors à retrouver les racines connaissant u^3 et v^3.

C'est ici qu'intervient le premier système (en l'occurrence ici $r_1+r_2+r_3=-a_1$).

On peut en effet résoudre le nouveau système

- $r_1+r_2+r_3=-a_1$
- $r_1+jr_2+j^2r_3=u$
- $r_1+jr_3+j^2r_2=v$

car $-a_1+u+v=3r_1$ puisque $1+j+j^2=0$

Ainsi les r_i sont bien exprimables à partir des a_i (encore une fois, même si le calcul détaillé reste très compliqué).