Des équations abéliennes

François NICOLAS
(atelier mamuphi ; 14 octobre 2023 ; 10h ; Ircam)

L'algèbre abélienne

Selon une certaine historiographie [1], la transition de l'algèbre classique à l'algèbre moderne s'opère de Lagrange-Vandermonde-Waring (1771), Ruffini (1799) et Cauchy (1813) à Galois (1831), sautant ainsi quasiment à pieds joints par-dessus Abel (1824-1829).
Heureusement, Jean-Jacques Szczeciniarz nous a rappelé la saison dernière [2] l'importance de l'algèbre abélienne, la thématisant sous le signe d'un certain romantisme et l'inscrivant dans la mutation stratégique d'une mathématique *classique* fondée sur les *formules* à une mathématique *moderne* fondée sur les *concepts* [3].
Dans cet atelier *mamuphi*, nous reviendrons sur cette algèbre abélienne [4] en nous intéressant plus particulièrement à sa théorie de certaines de ces équations algébriques irréductibles [5] mais résolubles qu'on appelle désormais *abéliennes*.
Abel a commencé son travail sur les équations algébriques en démontrant l'impossibilité de résoudre algébriquement l'équation quintique générale [6]. Il l'a démontré par l'absurde : en renversant la question initiale (*y a-t-il une expression algébrique pour les racines d'une équation algébrique donnée ?*) en la question inverse (*de quelles équations algébriques toutes les expressions algébriques concevables sont-elles les racines ?*), il démontre l'impossibilité d'engendrer l'équation quintique générale à partir durépertoire hiérarchiquement complet des expressions algébriques susceptibles de résoudre par radicaux cette équation [7].

Une méthode

Ce faisant, Abel met en œuvre cette méthode :
« *On se proposait de résoudre les équations sans savoir si cela était possible. Dans ce cas, on pourrait bien parvenir à la résolution, quoique cela ne fût nullement certain ; mais si par malheur la résolution était impossible, on aurait pu la chercher une éternité sans la trouver. Pour parvenir infailliblement à quelque chose dans cette matière, il faut donc prendre une autre route. On doit donner au problème une forme telle qu'il soit toujours possible de le résoudre, ce qu'on peut toujours faire d'un problème quelconque. Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible. […] En présentant le problème de cette manière, l'énoncé même contient le germe de la solution et montre la route qu'il faut prendre. […] Cette méthode est la seule dont on sait d'avance qu'elle peut conduire au but proposé.* » [8]
Cette méthode prolonge le renversement qui opère au principe de sa démonstration par l'absurde : une fois démontrée l'insolubilité de l'équation quintique générale (à partir des propriétés algébriques qu'entraîne la résolubilité), Abel s'attache en effet à comprendre plus avant ce que *résolubilité* algébrique veut formellement dire pour les équations irréductibles.
Notons en ce point la différence d'avec Galois qui va plutôt s'attacher (1831) à comprendre ce qu'*insolubilité* algébrique veut dire pour ces mêmes équations irréductibles.

Deux problèmes

Sa démonstration par l'absurde va ainsi le conduire à explorer deux problèmes :
1) Y a-t-il des résolutions non algébriques de ces équations algébriquement insolubles ? D'où son travail sur les fonctions elliptiques et les fonctions transcendantes susceptibles de les résoudre par des voies non strictement algébriques [9].
2) Y a-t-il une forme générale des équations algébriques qui s'avèrent algébriquement résolubles ? D'où son travail sur les équations dites *abéliennes*.

C'est ce second volet, tel que déployé dans ses deux mémoires de 1828-1829 [10], que nous étudierons.

Les équations abéliennes

Le postulat d'Abel

Abel opère selon ce que Kronecker propose [11] d'appeler son *postulat* : « *Résoudre une équation signifie la remplacer par une chaîne d'équations de nature prédéterminée. […] L'exigence selon laquelle, lors de cette résolution, toutes les grandeurs introduites successivement sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation à résoudre doit être appelée le "postulat d'Abel".* »

Un type particulier d'équation

D'où la théorie de ces équations que le même Kronecker en 1853 propose d'appeler *abéliennes* : ces équations irréductibles dont Abel démontre la résolubilité par le fait que

---

[1] Bourbaki : *Éléments d'histoire des mathématiques* (1974) ; Dieudonné : *Abrégé d'histoire des mathématiques* (1978)
[2] *En quel sens peut-on dire qu'Abel est un romantique ?* www.youtube.com/watch?v=_scnypeI3gw (4 mars 2023)
[3] Henrik Kragh Sœrensen : *The Mathematics of Niels Henrik Abel - Continuation and new Approaches in Mathematics during the 1820s* (2010)
[4] Voir sa remarquable synthèse par Christian Houzel : *The Work of Abel* (in *The Legacy of Niels Henrik Abel* ; Springer, 2004)
[5] Pour Abel (1828), une équation est *irréductible* si l'on ne peut « *exprimer ses racines par une équation moins élevée* » faisant appel aux mêmes coefficients. Principe donc analogue à celui des polynômes irréductibles (non factorisables), qui composent des sortes de polynômes « premiers », équivalents aux nombres premiers parmi les entiers. Dans le cas des équations quintiques, toute équation réductible est ipso facto résoluble puisque toutes les équations d'un ordre inférieur à 5 le sont.
[6] Voir ses deux mémoires de 1824 et 1826.
[7] Il démontre que la forme générale des équations algébriquement résolubles s'avère non compatible avec certaines propriétés combinatoires de l'équation quintique générale.
[8] *Sur la résolution algébrique des équations* (mémoire inachevé et posthume de 1828-1829)
[9] tout de même qu'on peut également les « résoudre » géométriquement (par intersection de courbes), par approximations numériques, par développements en séries, par fractions continues, par ultraradicaux…
[10] *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement / Sur la résolution algébrique des équations*
[11] en 1861 : voir Birgit Petri and Norbert Schappacher - *From Abel to Kronecker. Episodes from 19th Century Algebra* (*The Legacy of Niels Henrik Abel* ; op. cit. ; p. 229)

chaque racine peut s'y exprimer rationnellement en fonction de l'une quelconque des autres.
En négligeant le point réciproque auquel Abel n'a pas eu le temps de s'attaquer (toutes les équations irréductibles mais résolubles sont-elles *abéliennes* ?), on a le tableau suivant :

Équations quintiques	
réductibles (et donc résolubles)	**abéliennes** (irréductibles mais résolubles)
∄ *réductibles et insolubles*	**insolubles** (et donc irréductibles)

Quatre théorèmes

Pour ce faire, Abel enchaîne dans le premier de ses mémoires de 1828-1829 les quatre théorèmes suivants qui démontrent comment, dans ce contexte, une identification algébrique donnée peut progresser et s'étendre de proche en proche, selon une sorte de capillarité algébrique :

- [I] Si une seule racine d'une équation irréductible $\varphi(x)=0$ satisfait également une autre équation rationnelle $f(x)=0$ [12], alors toutes les racines de $\varphi(x)=0$ satisfont également $f(x)=0$.
- [III] Une équation irréductible est algébriquement résoluble si toutes ses racines peuvent être rationnellement exprimées par
  $$x, \theta(x), \theta^2(x), \ldots, \theta^{n-1}(x) \text{ avec } \theta^n(x)=x$$
  où $\theta(x)$ désigne une fonction rationnelle de x et de quantités connues.
- [IV] Une équation irréductible *dont le degré est un nombre premier* est algébriquement résoluble si deux de ses racines peuvent s'exprimer rationnellement l'une par l'autre.
- [VIII] Une équation irréductible est algébriquement résoluble si toutes ses racines ρ_j peuvent être rationnellement exprimées au moyen de l'une d'entre elles - soient r et $\rho_j=\theta_j(r)$ - et si, $\forall j$ et $\forall k$, on a alors la commutation $\theta_j[\theta_k(r)]=\theta_k[\theta_j(r)]$.

Un exemple d'équation abélienne

On s'appropriera ces théorèmes en examinant le cas particulier de l'équation abélienne
$$x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1=0$$
dont les racines, toutes réelles [13], sont algébriquement reliées par la relation algébrique $\theta(x)=x^2-2$ [14].

Diagonale interprétative

Atelier *mamuphi* oblige [15], on examinera les ombres et lumières que cette théorie algébrique apporte (de biais) sur les différentes manières subjectives d'organiser les collectifs.

Un mathème

On examinera ainsi la portée intellectuelle du « mathème » suivant qui interprète librement les précédents théorèmes.

Soit le regroupement des $n\geq 5$ individus aptes à partager les n compétences et tâches qu'une fiche de poste P vient définir. On sait que dans le cas général, chaque individu restera alors inidentifiable par les moyens propres engagés dans cette fiche P. Certes, on pourra toujours demander à chaque individu ainsi sélectionné sa carte d'identité pour lui associer, cette fois de manière exogène, son nom d'état civil. Mais, de l'intérieur du regroupement, toute nomination individuelle ne pourra relever que de pseudonymes [16] en sorte que chaque individu y opèrera anonymement.
Par contre, Abel nous *montre* [17] que, si des relations entre ces différents individus sont formulables selon les mêmes critères que ceux engagés dans la fiche de poste (par formulation explicite de liens internes : hiérarchie des compétences, division du travail, fonction communautaire…), alors chaque individu perdra son anonymat et deviendra, cette fois de manière endogène, nommable selon les critères constituant le regroupement.

Contrepoint Abel-Galois

Ce faisant, on contrepointera les démarches d'Abel et de Galois :

- démarche d'esprit plus *constructiviste* chez Abel puisqu'il construit les capacités nominatives des formulations algébriques pour les étendre maximalement : ici, le collectif des racines *se construit explicitement* ;
- démarche d'esprit plus *générique* chez Galois puisqu'il examine comment l'équation polynomiale est secrètement commandée par *un inconscient algébrique*, qui s'avère structuré comme un *groupe* : le regroupement est ici *inconsciemment ossaturé*. [18]

Trois types de collectifs

Par raisonances en ombres et lumières, une telle dialectique algébrique (articulant équations *réductibles*, *abéliennes* et *insolubles*) suggère alors de distinguer trois types de collectifs subjectivés :

- les *associations*, qui fédèrent des capacités individuelles apportées par des membres qui y interviennent en leur *nom propre d'état civil* ;
- les *communautés*, qui définissent les capacités partagées par tous leurs membres et, réglementant leurs rapports internes, dotent chacun d'eux d'un *nom communautaire* ;
- les *groupes* stricto sensu, qui inaugurent de nouvelles capacités, anonymement collectivisées, en sorte que leurs membres, quoique collectivement définis, y demeurent individuellement *innommables* (d'où l'usage fréquent de simples pseudonymes).

On examinera la portée intellectuelle de cette typologie et de la figure du *défini innommable* qu'elle dépose :

- dans le cas musical : en matière de collectifs de voix (juxtaphonies, polyphonies, homophonies) ;
- dans le cas militant : en matière de collectifs humains.

***

[12] où f(x) mobilise des quantités intervenant déjà dans $\varphi(x)$
[13] Nommons-les par ordre numérique croissant :
$A\cong-1{,}92$; $B\cong-1{,}31$; $C\cong-0{,}28$; $D\cong0{,}83$; $E\cong1{,}68$
[14] Comme dans le théorème III, on a, avec n=5 : A ; $E=\theta(A)$; $D=\theta(E)=\theta^2(A)$; $B=\theta(D)=\theta^3(A)$; $C=\theta(B)=\theta^4(A)$ et finalement $A=\theta(C)=\theta^5(A)$.
[15] Voir par ailleurs ses sept caractéristiques.
[16] Ou d'une numérotation ; mais numéroter n'est pas exactement nommer.
[17] Relativement à cette raisonance, il serait trop dire qu'il le « démontre ».
[18] Voir Bachelard présentant « *la pensée algébrique comme une psychanalyse de la pensée géométrique* » (*La formation de l'esprit scientifique* ; p. 237).